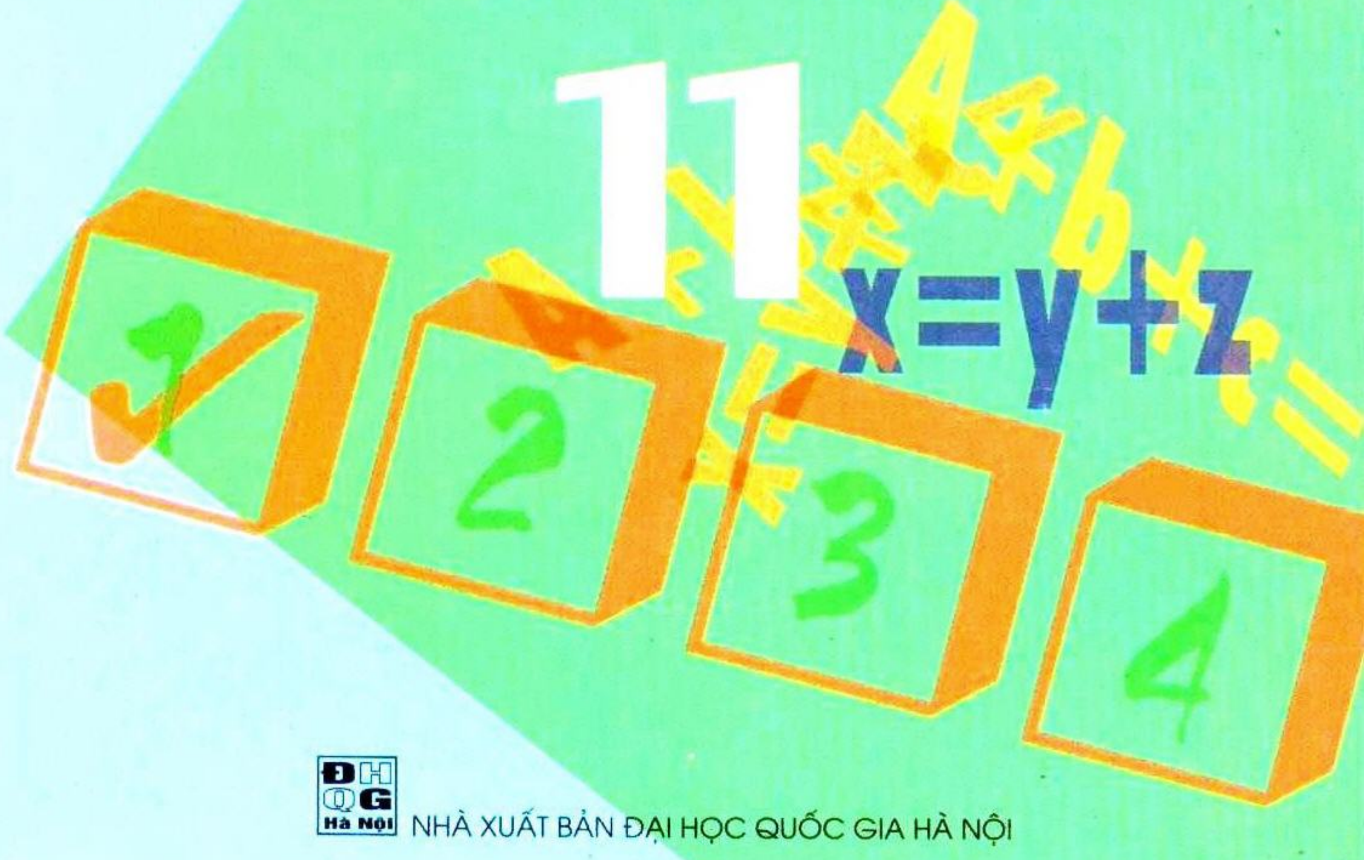
LÊ HỒNG ĐỨC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

11

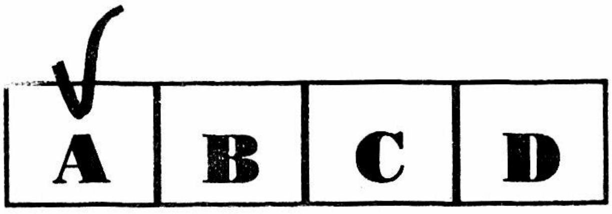


NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÓM CỰ MÔN

LÊ BÍCH NGỌC - NGUYỄN VIẾT HOÀ
LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ HỮU TRÍ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Theo chủ trương của BGD&ĐT các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. *Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.*
2. *Ở đây, thông thường các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:*
    - *Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
    - *Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm còn lại.*

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. *Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa* $\frac{a}{2}$ *điểm với xác suất 25%.*
2. *Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm. Thí dụ với câu hỏi:*

(1 điểm): Giải phương trình $\sqrt{x} = 2 - x$.

A. $x = 0$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 1$.

Cách 1: *Thực hiện phép thử bằng tay*, các em sẽ cần thử cho các nghiệm $x = 0$, $x = 5$, $x = 4$, $x = 1$, cụ thể:

- Với $x = 0$, ta được:

  $\sqrt{0} = 2 - 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 0$ không là nghiệm.
- Với $x = 5$, ta được:

  $\sqrt{5} = 2 - 5 = -3$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 5$ không là nghiệm.
- Với $x = 4$, ta được:

  $\sqrt{4} = 2 - 4 = -2$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 4$ không là nghiệm.

- Với x = 1, ta được:

$\sqrt{1} = 2 - 1 = 1$, đúng $\Rightarrow$ x = 1 là nghiệm.

Vậy, các em sẽ lựa chọn câu trả lời trắc nghiệm là x = 1.

Cách 2: Sử dụng máy tính fx – 570MS bằng cách lần lượt thực hiện:

Nhập phương trình $\sqrt{x} - 2 + x = 0$ vào máy tính bằng cách ấn:

$\boxed{\sqrt{}}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{X}\ \boxed{-}\ 2\ \boxed{+}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{X}$

- Để thử với x = 0, ta ấn:

$\boxed{\text{CALC}}\ 0\ \boxed{=}$ $\boxed{-2}$

- Để thử với x = 5, ta ấn:

$\boxed{\text{CALC}}\ 5\ \boxed{=}$ $\boxed{5.236067978}$

- Để thử với x = 4, ta ấn:

$\boxed{\text{CALC}}\ 4\ \boxed{=}$ $\boxed{4}$

- Để thử với x = 1, ta ấn:

$\boxed{\text{CALC}}\ 1\ \boxed{=}$ $\boxed{0}$

Vậy, các em sẽ lựa chọn câu trả lời trắc nghiệm là x = 1.

3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng* $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ *điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TOÁN THPT

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ sách gồm 6 cuốn:

Cuốn 1: Giải bài tập trắc nghiệm Đại số 10
Cuốn 2: Giải bài tập trắc nghiệm Hình học 10
Cuốn 3: Giải bài tập trắc nghiệm Đại số và Giải tích 11
Cuốn 4: Giải bài tập trắc nghiệm Hình học 11
Cuốn 5: Giải bài tập trắc nghiệm Đại số và Giải tích 12
Cuốn 6: Giải bài tập trắc nghiệm Hình học 12

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.S Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà Nội, ngày 10 tháng 8 năm 2007

NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I – HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1 CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HÀM TUẦN HOÀN

Hàm số f(x) xác định trên tập hợp D gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

$$x - T \in D \text{ và } x + T \in D \qquad (1)$$

$$f(x + T) = f(x) \qquad (2)$$

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số T có các tính chất trên gọi là *chu kỳ cơ sở* của hàm tuần hoàn f(x).

Chú ý: (*Các dấu hiệu để biết hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn*): Hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

1. Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
2. Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.
3. Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
4. Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $.. < x_n < x_{n+1} < ..$ mà $|x_n - x_{n+1}| \to 0$ hay ∞.

2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC BIẾN SỐ THỰC

Các hàm số sau được gọi là *các hàm số lượng giác biến số thực* (gọi tắt là hàm số lượng giác):

1. Hàm số y = sinx, có tập xác định $D = \mathbf{R}$.
2. Hàm số y = cosx, có tập xác định $D = \mathbf{R}$.
3. Hàm số y = tanx, có tập xác định $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
4. Hàm số y = cotx, có tập xác định $D = \mathbf{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

3. HÀM SỐ y = sinx

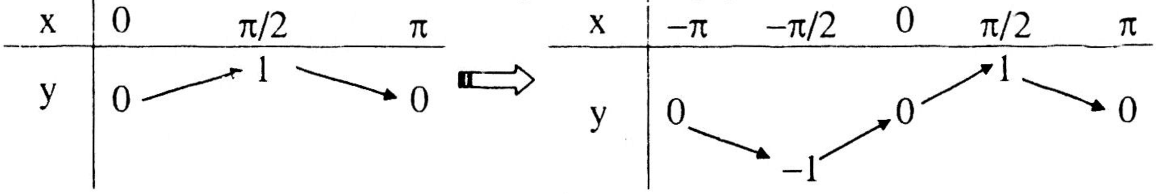
Ta có:

- Hàm số y = sinx là hàm số lẻ trên **R**.
- Hàm số y = sinx tuần hoàn với chu kỳ 2π.

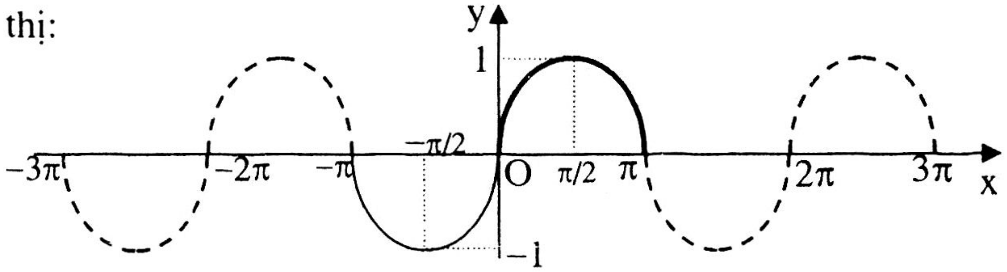
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = sinx trên R ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $[-\pi, \pi]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, ...$

Xét hàm số y = sinx trên [0, π].

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:



Đồ thị:



Từ đây, ta có nhận xét quan trọng là $|\sin x| \le 1$ với mọi x.

4. HÀM SỐ y = cosx

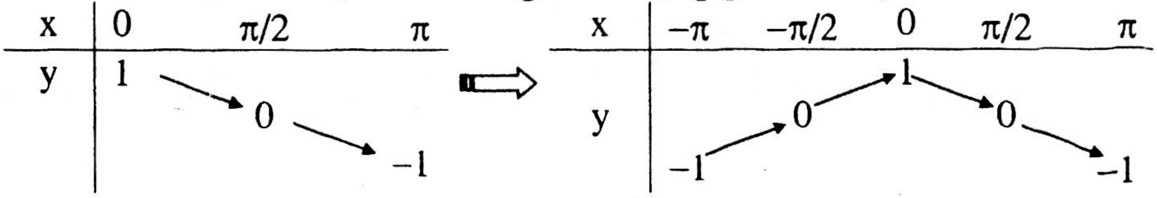
Ta có:

- Hàm số y = cosx là hàm số chẵn trên **R**.
- Hàm số y = cosx tuần hoàn với chu kỳ 2π.

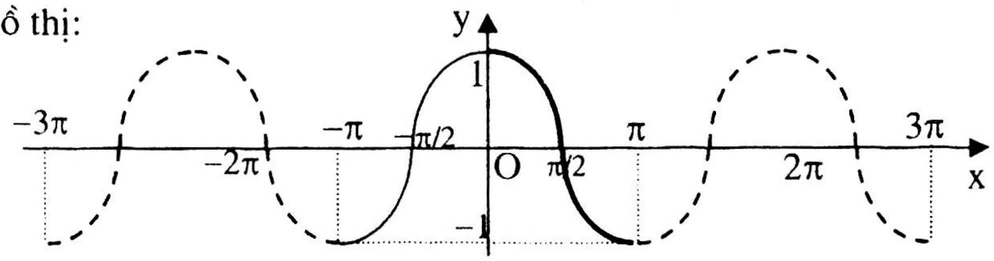
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cosx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn [0, π], sau đó lấy đối xứng đồ thị qua trục Oy, ta được đồ thị trên đoạn [− π, π], cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = cosx trên [0, π].

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:



Đồ thị:



Từ đây ta có nhận xét quan trọng là $|\cos x| \le 1$ với mọi x.

5. HÀM SỐ y = tanx

Ta có:

- Hàm số y = tanx là hàm số lẻ trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- Hàm số y = tanx tuần hoàn với chu kỳ π.

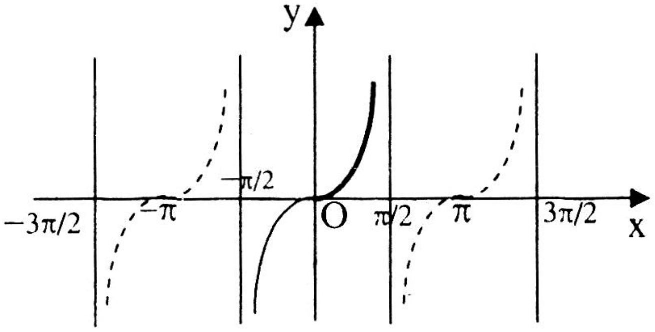
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = tanx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2})$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = tanx trên $[0, \frac{\pi}{2})$.

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & \pi/2 \\ \hline y & 0 & \nearrow & +\infty \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc} x & -\pi/2 & & 0 & & \pi/2 \\ \hline y & -\infty & \nearrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Đồ thị:



Chú ý: Trong hệ trục toạ độ Oxy các đường thẳng có phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ được gọi là các *đường tiệm cận* của đồ thị hàm số y = tanx.

6. HÀM SỐ **y = cotx**

Ta có:

- Hàm số y = cotx là hàm số lẻ trên $\mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- Hàm số y = cotx tuần hoàn với chu kỳ π.

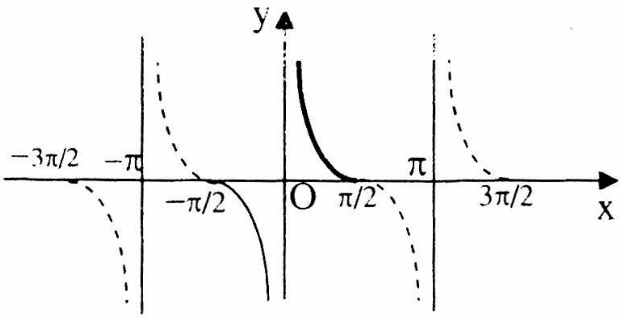
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cotx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $(0, \frac{\pi}{2}]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = cotx trên $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & \pi/2 \\ \hline y & +\infty & \searrow & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc} x & -\pi/2 & & 0 & & \pi/2 \\ \hline y & 0 & \searrow & -\infty \,\Big\|\, +\infty & \searrow & 0 \end{array}$$

Đồ thị:



Chú ý: Trong hệ trục toạ độ Oxy các đường thẳng có phương trình $x = k\pi$, $k \in$ **Z** được gọi là các *đường tiệm cận* của đồ thị hàm số y = cotx.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{3 - \sin x}$.

A. $\varnothing$. **B.** $[-1; 1]$. **C.** $(-\infty; 3]$. **D.** **R**.

b. $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

A. $\mathbf{R}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. **C.** $\mathbf{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

B. $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. **D.** $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$.

A. $\mathbf{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. **C.** $\mathbf{R}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

B. $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. **D.** $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

b. $y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{3})$.

A. $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. **C.** $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

B. $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. **D.** $\mathbf{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài 3: Xét tính chất chẵn – lẻ của các hàm số sau:

a. y = –2sinx.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

b. y = 3sinx – 2.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

c. $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

d. $y = \tan|x|$.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

Bài 4: Xét tính chất chẵn – lẻ của các hàm số sau:

a. $y = \tan x - \sin 2x$.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

b. $y = \sin x - \cos x$.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

c. $y = \sin x.\cos^2 x + \tan x$.

A. Chẵn. **B.** Lẻ. **C.** Không chẵn, không lẻ.

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a. $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 3$.

A. $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = 1$. **C.** $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = 1$.

B. $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = -1$. **D.** $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = 3$.

b. $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$.

A. $y_{Max} = \sqrt{2} + 1$ và $y_{Min} = -1$. **C.** $y_{Max} = \sqrt{2}$ và $y_{Min} = 1$.

B. $y_{Max} = \sqrt{2} - 1$ và $y_{Min} = -1$. **D.** $y_{Max} = \sqrt{2}$ và $y_{Min} = 1$.

c. $y = 4\sin\sqrt{x}$.

A. $y_{Max} = 0$ và $y_{Min} = -4$. **C.** $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = 0$.

B. $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = 0$. **D.** $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = -4$.

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 1/2.

Bài 7: Giá trị bé nhất của biểu thức $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ là:

A. -2. **B.** $\sqrt{3}/2$. **C.** -1. **D.** 0.

Bài 8: Tìm tập giá trị của hàm số:

a. $y = 2\sin 2x + 3$.

A. $[0 ; 1]$. **B.** $[2 ; 3]$. **C.** $[-2 ; 3]$. **D.** $[1 ; 5]$.

b. $y = 1 - 2|\sin 3x|$.

A. $[-1 ; 1]$. **B.** $[0 ; 1]$. **C.** $[-1 ; 0]$. **D.** $[-1 ; 3]$.

c. $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$.

A. $[3 ; 10]$. **B.** $[6 ; 10]$. **C.** $[-1 ; 13]$. **D.** $[1 ; 11]$.

Bài 9: Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ có cùng tập xác định.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ có cùng tập xác định.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$ là những hàm số lẻ.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Các hàm số $y = \cos x$, $y = \cot x$ là những hàm số chẵn.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 10: Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ cùng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right)$.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-2\pi ; -\pi)$.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \tan x$ đồng biến thì hàm số $y = \cot x$ nghịch biến.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Trên mỗi khoảng hàm số $y = \sin x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Trên mỗi khoảng hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

A. Đúng. **B.** Sai.

§2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán 1: Phương trình $\sin x = m$.

Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2: Nếu $|m| \le 1$, khi đó đặt $m = \sin\alpha$, ta được:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{hoặc} \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + 2k\pi \\ x = \pi - \arcsin m + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z},$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt: Ta có các kết quả:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 2: Phương trình $\cos x = m$.

Phương pháp chung

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m| \le 1$, khi đó đặt $m = \cos\alpha$, ta được:

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{hoặc} \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + 2k\pi \\ x = -\arccos m + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z},$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt: Ta có các kết quả:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3: Phương trình tanx = m.

Phương pháp chung

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tan của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng: $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tan của góc đặc biệt, khi đó từ: $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Bài toán 4: Phương trình cotx = m.

Phương pháp chung

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cot của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng : $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cot của góc đặc biệt, khi đó từ: $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 11: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{Z}$):

a. $\sin 4x = \sin\frac{\pi}{5}$.

A. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}$.

C. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}$.

B. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2}$.

D. $x = \frac{3\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{2}$.

b. $\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$.

A. $x = \frac{11\pi}{6} + 10k\pi$ và $x = -\frac{29\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -\frac{11\pi}{6} + 10k\pi$ và $x = -\frac{29\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

C. $x = \frac{11\pi}{6} + 10k\pi$ và $x = \frac{29\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

D. $x = -\frac{11\pi}{6} + 10k\pi$ và $x = \frac{29\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài 12: Giải các phương trình sau:

a. $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2}$.

A. $x = \pm\sqrt{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \pm\sqrt{2} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \pm 2\sqrt{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = \pm 2\sqrt{2} + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5}$.

A. $x = \pm \arccos\frac{2}{5} - \frac{\pi}{18} + 2k\pi$. **C.** $x = \pm \arccos\frac{5}{2} - \frac{\pi}{18} + k\pi$.

B. $x = \pm \arccos\frac{2}{5} + \frac{\pi}{18} + 2k\pi$. **D.** $x = \pm \arccos\frac{5}{2} + \frac{\pi}{18} + k\pi$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài 13: Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho:

a. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$.

A. $x_1 = -\frac{11\pi}{12}$ và $x_2 = \frac{7\pi}{12}$. **C.** $x_1 = -\frac{11\pi}{12}$ và $x_2 = -\frac{7\pi}{12}$.

B. $x_1 = \frac{11\pi}{12}$ và $x_2 = \frac{7\pi}{12}$. **D.** $x_1 = \frac{11\pi}{12}$ và $x_2 = -\frac{7\pi}{12}$.

b. $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

A. $x_1 = 5 - \frac{11\pi}{6}$ và $x_2 = 5 - \frac{13\pi}{6}$. **C.** $x_1 = 5 - \frac{11\pi}{6}$ và $x_2 = 5 + \frac{13\pi}{6}$.

B. $x_1 = 5 + \frac{11\pi}{6}$ và $x_2 = 5 - \frac{13\pi}{6}$. **D.** $x_1 = 5 + \frac{11\pi}{6}$ và $x_2 = 5 + \frac{13\pi}{6}$.

Bài 14: Giải các phương trình sau:

a. $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{5}$.

A. $x = \frac{3\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \frac{3\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\tan(x - 15^0) = 5$.

A. $x = -15^0 + \arctan 5 + k180^0$. **C.** $x = -15^0 + \arctan 5 + k360^0$.

B. $x = 15^0 + \arctan 5 + k180^0$. **D.** $x = 15^0 + \arctan 5 + k360^0$.

với $k \in \mathbf{Z}$.

c. $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$.

A. $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = 1 + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = 1 + \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài 15: Giải các phương trình sau:

a. $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

A. $x = -\frac{1}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = -\frac{1}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -\frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = -\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^0\right) = -\sqrt{3}$.

A. $x = -200^0 + k360^0, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = -20^0 + k360^0, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -200^0 + k720^0, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = -20^0 + k720^0, k \in \mathbf{Z}$.

c. $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5}$.

A. $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \frac{2\pi}{5} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài 16: Giải các phương trình sau:

a. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$.

A. $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -\frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

C. $x = -\frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

D. $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b. $\tan(2x + 45^0).\tan(180^0 - \frac{x}{2}) = 1$.

A. $x = 90^0 + k180^0, k \in \mathbf{Z}$. **C.** $x = 90^0 + k120^0, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = -90^0 + k180^0, k \in \mathbf{Z}$. **D.** $x = -90^0 + k120^0, k \in \mathbf{Z}$.

c. $\cos 2x - \sin^2 x = 0$.

A. $x = \pm\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
C. $x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

B. $x = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
D. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài 17: Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng đã cho:

a. $\tan(2x - 15^0) = 1$ với $-180^0 < x < 90^0$.

A. $x = -150^0$. **B.** $x = -60^0$. **C.** $x = 30^0$. **D.** Cả A, B, C

b. $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

A. $x_1 = -\frac{4\pi}{9}$ và $x_2 = \frac{\pi}{9}$.
C. $x_1 = \frac{4\pi}{9}$ và $x_2 = \frac{\pi}{9}$.

B. $x_1 = \frac{4\pi}{9}$ và $x_2 = -\frac{\pi}{9}$.
D. $x_1 = -\frac{4\pi}{9}$ và $x_2 = -\frac{\pi}{9}$.

Bài 18: Tính các góc của tam giác ABC, biết $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm và đường $AH = 1$cm.

A. $\hat{A} \approx 100^0$, $\hat{B} = 45^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$ hoặc $\hat{A} \approx 10^0$, $\hat{B} = 135^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$.

B. $\hat{A} \approx 105^0$, $\hat{B} = 40^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$ hoặc $\hat{A} \approx 5^0$, $\hat{B} = 140^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$.

C. $\hat{A} \approx 90^0$, $\hat{B} = 55^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$ hoặc $\hat{A} \approx 20^0$, $\hat{B} = 125^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$.

D. $\hat{A} \approx 80^0$, $\hat{B} = 65^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$ hoặc $\hat{A} \approx 30^0$, $\hat{B} = 115^0$ và $\hat{C} \approx 35^0$.

Bài 19: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau (với $k \in \mathbf{Z}$):

a. $y = \frac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$.

A. $\mathbf{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$.
C. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$.

B. $\mathbf{R}\backslash\{\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$.
D. $\mathbf{R}\backslash\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\}$.

b. $y = \frac{\sin(x - 2)}{\cos 2x - \cos x}$.

A. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{k\pi}{3}\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.
C. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{2k\pi}{3}\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

B. $\mathbf{R}\backslash\{k\pi\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.
D. $\mathbf{R}\backslash\{2k\pi\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

c. $y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$.

A. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\}$.
C. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$.

B. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\}$.
D. $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$.

d. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x + 1}$.

A. $R\backslash\{\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\}$. **C.** $R\backslash\{\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + k\pi\}$.

B. $R\backslash\{\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\}$. **D.** $R\backslash\{\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + k\pi\}$.

Bài 20: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40^0 bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số:

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in Z \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a. Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm ?

A. 262. **B.** 266. **C.** 281. **D.** 292.

b. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

A. 365. **B.** 353. **C.** 235. **D.** 153.

c. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

A. 217. **B.** 117. **C.** 271. **D.** 171.

§3 MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dạng 1: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

Phương pháp áp dụng

Đặt hàm số lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ nếu có (thí dụ $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$, điều kiện $|t| \leq 1$), rồi giải phương trình theo ẩn phụ này.

Dạng 2: Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx.

Phương pháp áp dụng

Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin x + b\cos x = c. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2. Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên tồn tại góc α sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha .$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\alpha+\sin\alpha.\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$, kiểm tra trực tiếp vào phương trình

Bước 2. Với $\cos\frac{x}{2}\neq0\Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi$, đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\text{ và }\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2}+b.\frac{1-t^2}{1+t^2}=c\Leftrightarrow(c+b)t^2-2at+c-b=0.\quad(2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 3: Với những yêu cầu biện luận tính chất nghiệm của phương trình trong $(\alpha;\beta)$, ta có thể lựa chọn phương pháp điều kiện cần và đủ.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với $D\subset[0,2\pi]$.
3. Cách 3 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu biện luận theo tham số để phương trình k có nghiệm thuộc tập D với $D\cap[0,2\pi]\neq\varnothing$.
4. Từ cách giải 1 ta có được kết quả sau:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$$

kết quả đó gợi ý cho bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số dạng $y = a.\sin x + b.\cos x$, $y = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác.

Dạng đặc biệt: Ta có các kết quả:

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$
- $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Dạng 3: Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx.

Phương pháp áp dụng

Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Khi đó phương trình (1) có dạng $a = d$.

- Nếu $a = d$, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq d$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

Đặt $t = \tan x$, phương trình có dạng:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t

Cách 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ và } \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ta được:

$$b.\sin 2x + (c - a)\cos 2x = d - c - a. \qquad (3)$$

Đây là phương trình bậc nhất của sin và cos.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiêm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 21: Giải các phương trình sau:

a. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{N}$. **D.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

b. $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{9}, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{N}$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{N}$.

c. $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{N}$. **D.** Cả A, B, C.

Bài 22: Giải các phương trình sau:

a. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

A. $x = 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. **D.** Cả A, B, C.

b. $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$.

A. $x = 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$.

c. $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Bài 23: Giải các phương trình sau trên khoảng đã cho rồi dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi để tính gần đúng nghiệm của chúng.

a. $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $x \approx -0,34$. **B.** $x \approx -0,32$. **C.** $x \approx -0,26$. **D.** $x \approx -0,20$.

b. $4\cos 2x + 3 = 0$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $x \approx 0{,}21$. **B.** $x \approx 1{,}21$. **C.** $x \approx 1{,}12$. **D.** $x \approx 0{,}12$.

c. $\cot^2 x - 3\cot x - 10 = 0$ trên$(0; \pi)$.

A. $x \approx 1{,}2$ và $x \approx 2{,}68$. **C.** $x \approx 0{,}2$ và $x \approx 2{,}68$.

B. $x \approx 1{,}2$ và $x \approx 1{,}68$. **D.** $x \approx 0{,}2$ và $x \approx 1{,}68$.

d. $5 - 3\tan 3x = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $x \approx -0{,}34$. **B.** $x \approx -0{,}24$. **C.** $x \approx 0{,}24$. **D.** $x \approx 0{,}34$.

Bài 24: Giải các phương trình sau:

a. $3\cos x + 4\sin x = -5$.

A. $x = \pi + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$ với $\frac{3}{5} = \cos\alpha$.

B. $x = \pi + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$ với $\frac{3}{5} = \sin\alpha$.

C. $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$ với $\frac{3}{5} = \cos\alpha$.

D. $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$ với $\frac{3}{5} = \sin\alpha$.

b. $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$.

A. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, x = \frac{13\pi}{12} + k\pi$. **C.** $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

B. $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, x = \frac{13\pi}{24} + k\pi$. **D.** $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

c. $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$.

A. $x = k\pi, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = 2k\pi, k \in \mathbf{N}$. **D.** Vô nghiệm.

Bài 25: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau:

a. $a.\sin x + b.\cos x$ (a, b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$).

A. $P_{Max} = \sqrt{a + b}$ và $P_{Min} = -\sqrt{a + b}$.

B. $P_{Max} = \sqrt{a + b^2}$ và $P_{Min} = -\sqrt{a + b^2}$.

C. $P_{Max} = \sqrt{a^2 + b}$ và $P_{Min} = -\sqrt{a^2 + b}$.

D. $P_{Max} = \sqrt{a^2 + b^2}$ và $P_{Min} = -\sqrt{a^2 + b^2}$.

b. $\sin^2x + \sin x.\cos x + 3\cos^2x$.

A. $Q_{Max} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ và $Q_{Min} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $Q_{Max} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $Q_{Min} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $Q_{Max} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $Q_{Min} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $Q_{Max} = 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ và $Q_{Min} = 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 26: Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin x.\cos x - \cos^2x = 4$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{N}$. **C.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbf{N}$. **D.** Vô nghiệm.

b. $3\sin^2x + 4\sin 2x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \arctan(\sqrt{3} - \frac{8}{3}) + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \arctan(\sqrt{3} - \frac{8}{3}) + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

C. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \arctan(\sqrt{3} + \frac{8}{3}) + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \arctan(\sqrt{3} + \frac{8}{3}) + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

c. $\sin^2x + \sin 2x - 2\cos^2x = \frac{1}{2}$.

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-5) + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbf{N}$.

Bài 27: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\cos x\cos 5x = \cos 2x\cos 4x$.

A. $x = k\pi$. **B.** $x = \frac{k\pi}{2}$. **C.** $x = \frac{k\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{k\pi}{4}$.

b. $\cos 5x\sin 4x = \cos 3x\sin 2x$.

A. $x = k\pi$. **C.** Vô nghiệm.

B. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$. **D.** $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{7}$.

Bài 28: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$.

A. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{3}$. **C.** $x = \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$.

B. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$. **D.** Vô nghiệm.

b. $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \pi + k\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \pi + 2k\pi$. **D.** Vô nghiệm.

Bài 29: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$.

A. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{3}$. **C.** $x = \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$.

B. $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{5}$. **D.** Vô nghiệm.

b. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **C.** $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

B. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$. **D.** Cả A, B, C.

Bài 30: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\tan\frac{x}{2} = \tan x$.

A. $x = k\pi$. **B.** $x = 2k\pi$. **C.** $x = \pi + 2k\pi$. **D.** Cả A, B, C.

b. $\tan(2x + 10^0) + \cot x = 0$.

A. $x = -100^0 + k180^0$. **C.** $x = -10^0 + k180^0$.

B. $x = 100^0 + k180^0$. **D.** $x = 10^0 + k180^0$.

Bài 31: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. **C.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **D.** $x = k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

b. $\tan x + \tan 2x = \sin 3x.\cos x$.

A. $x = k\pi$. **B.** $x = \frac{k\pi}{2}$. **C.** $x = \frac{k\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{k\pi}{4}$.

c. $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$.

A. $x = k\pi$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.
C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = k\pi$.
D. Vô nghiệm.

Bài 32: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$.

A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.
C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.
D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

b. $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
D. Cả A, B, C.

c. $\sin x + \sin^2\frac{x}{2} = 0{,}5$.

A. $x = \arctan\frac{1}{3} + k\pi$.
C. $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$.

B. $x = k\pi$.
D. Cả A, B, C.

Bài 33: Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng đã cho.

a. $2\sin^2 x + 3\cos x = 2$, $0^0 \le x \le 360^0$.

A. $x = 30^0$ và $x = 120^0$.
C. $x = 90^0$ và $x = 270^0$.

B. $x = 90^0$ và $x = 120^0$.
D. Vô nghiệm.

b. $\tan x + 2\cot x = 3$, $180^0 \le x \le 360^0$.

A. $x = 205^0$ và $x \approx 213{,}435^0$.
C. $x = 215^0$ và $x \approx 233{,}435^0$.

B. $x = 220^0$ và $x \approx 223{,}435^0$.
D. $x = 225^0$ và $x \approx 243{,}435^0$.

Bài 34: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-\frac{1}{3}) + k\pi$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{3} + k\pi$.

C. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

D. Vô nghiệm.

b. $3\sin^2 2x - \sin 2x.\cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$.

A. $x = \arctan 2 + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan(-3) + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$.

B. $x = \arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan 3 + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$.

C. $x = \arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan(-3) + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$.

D. $x = \arctan 2 + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \arctan 3 + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{N}$.

c. $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x.\cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$.

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

D. Vô nghiệm.

Bài 35: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

A. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

B. $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

D. Cả A, B, C.

b. $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$.

A. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

B. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$.

C. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$.

D. Vô nghiệm.

Bài 36: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbf{N}$):

a. $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

B. $x = k\pi$.

C. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

D. Vô nghiệm.

b. $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

B. $x = 2k\pi$.

C. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

D. Cả A, B, C.

Bài 37: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbb{N}$):

a. $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$.

A. $x = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}$. **C.** $x = \arctan\frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}$.

B. $x = \arctan 2 + k\pi$. **D.** Cả A, B, C.

b. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-\frac{1}{2}) + k\pi$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-\frac{1}{2}) + k\pi$.

D. Vô nghiệm.

Bài 38: Giải các phương trình sau (với $k \in \mathbb{N}$):

a. $\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

A. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

B. $x = k\pi$. **D.** Vô nghiệm.

b. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

A. Vô nghiệm.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan(-\frac{1}{2}) + k\pi$.

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$.

Bài 39: Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng (hình vẽ trong sgk). Khoảng cách h từ vật đó đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó:

$$d = 5\sin 6t - 4\cos 6t,$$

với d được tính bằng xentimet, ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở phía trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở phía dưới vị trí cân bằng. Hỏi

a. Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở vị trí cân bằng ?

A. $t \approx 0{,}11$ hoặc $t \approx 0{,}64$. **C.** $t \approx 0{,}11$ hoặc $t \approx 0{,}15$.

B. $t \approx 0{,}15$ hoặc $t \approx 0{,}64$. **D.** Vô nghiệm.

b. Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở xa vị trí cân bằng nhất? (tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

A. $t \approx 0{,}27$ hoặc $t \approx 0{,}9$. **C.** $t \approx 0{,}27$ hoặc $t \approx 0{,}8$.

B. $t \approx 0{,}37$ hoặc $t \approx 0{,}9$. **D.** $t \approx 0{,}37$ hoặc $t \approx 0{,}8$.

Bài 40: Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$, được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với:

$$d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right],$$

trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu $d < 0$ trong trường hợp trái lại.

a. Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

A. $t = 0{,}5$ hoặc $t = 2$. **C.** $t = 0{,}4$ hoặc $t = 2$.

B. $t = 0{,}5$ hoặc $t = 1$. **D.** $t = 0{,}4$ hoặc $t = 1$.

b. Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu cách vị trí cân bằng 2m.

A. $t = 0{,}1$. **B.** $t = 0{,}9$. **C.** $t = 1{,}6$. **D.** Cả A, B, C.

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). C.

a. Điều kiện: $3 - \sin x \geq 0$. Vì $|\sin x| \leq 1$ nên $3 - \sin x \geq 2$ với mọi x.
Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

b. Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài 2: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Điều kiện: $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

b. Điều kiện: $2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài 3: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C; c). C; d). A.

a. Hàm số xác định trên **R** là tập đối xứng.
Ta có: $f(-x) = -2\sin(-x) = 2\sin x = -f(x)$. Vậy, hàm số $y = -2\sin x$ là hàm số lẻ.

b. Hàm số xác định trên **R** là tập đối xứng.
Ta có: $f(-x) = 3\sin(-x) - 2 = -3\sin x - 2 \neq \pm f(x)$.
Vậy, hàm số $y = 3\sin x - 2$ không lẻ, không chẵn.

c. Hàm số xác định trên **R** là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \cos(-x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq \pm f(x)$.

Vậy, hàm số $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ không lẻ, không chẵn.

d. Hàm số xác định trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.
Vậy, hàm số $y = \tan|x|$ là hàm số chẵn.

Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C; c). B.

a. Hàm số xác định trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ là tập đối xứng, ta có:

$$f(-x) = \tan(-x) - \sin(-2x) = -\tan x + \sin 2x = -(\tan x - \sin 2x) = -f(x).$$

Vậy, hàm số $y = \tan x - \sin 2x$ là hàm số lẻ.

b. Hàm số xác định trên **R** là tập đối xứng.
Ta có: $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x \neq \pm f(x)$.
Vậy, hàm số $y = \sin x - \cos x$ không lẻ, không chẵn.

c. Hàm số xác định trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \sin(-x).\cos^2(-x) + \tan(-x) = -\sin x.\cos^2 x - \tan x$
$= -(\sin x.\cos^2 x + \tan x) = -f(x)$.

Vậy, hàm số $y = \sin x.\cos^2 x + \tan x$ là hàm số lẻ.

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Nhận xét rằng: $\left|\cos(x + \frac{\pi}{3})\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \cos(x + \frac{\pi}{3}) \le 1$

$$\Leftrightarrow -2 + 3 \le 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 3 \le 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5$$

từ đó, suy ra $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = 1$.

b. Ta lần lượt có nhận xét:

$$\sqrt{1 - \sin(x^2)} \ge 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1 \ge -1 \Rightarrow y_{Min} = -1.$$

$$\sin(x^2) \ge -1 \Leftrightarrow -\sin(x^2) \le 1 \Leftrightarrow 1 - \sin(x^2) \le 2 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin(x^2)} \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1 \le \sqrt{2} - 1 \Rightarrow y_{Max} = \sqrt{2} - 1.$$

c. Nhận xét rằng: $\left|\sin\sqrt{x}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin\sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow -4 \le y = 4\sin\sqrt{x} \le 4$

từ đó, suy ra $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = -4$.

Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$P = \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x) - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \le 1$$

suy ra $P_{Max} = 1$, đạt được khi: $\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Cách 2: Vì $|\sin x| \le 1$ và $|\cos x| \le 1$ nên:

$$\begin{cases} \sin^4 x \le \sin^2 x \\ \cos^4 x \le \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow P = \sin^4x + \cos^4x \le (\sin^2x + \cos^2x) = 1$$

suy ra $P_{Max} = 1$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x \\ \cos^4 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \text{ hoặc } \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \text{ hoặc } \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta biến đổi:

$$P = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \ge -1.$$

suy ra $P_{Min} = -1$, đạt được khi:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A; c). D.

a. Ta biến đổi: $y = 2\sin 2x + 3 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}(y - 3)$. (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2}(y-3)\right| \le 1 \Leftrightarrow |y-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le y-3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5.$$

Vậy, tập giá trị của hàm số là đoạn [1 ; 5].

b. Ta biến đổi: $y = 1 - 2|\sin 3x| \Leftrightarrow |\sin 3x| = \frac{1}{2}(1 - y)$. (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$0 \le \frac{1}{2}(1-y) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-y \le 2 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1.$$

Vậy, tập giá trị của hàm số là đoạn [–1 ; 1].

c. Ta biến đổi: $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6 \Leftrightarrow 4\cos 2x - 3\sin 2x = y - 6$. (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|y-6| \le \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \Leftrightarrow -5 \le y-6 \le 5 \Leftrightarrow 1 \le y \le 11.$$

Vậy, tập giá trị của hàm số là đoạn [1 ; 11].

Bài 9:

a. A b. B c. A d. B

Bài 10:

a. B b. A c. B

d. Khẳng định này là sai, bởi hai hàm số y = sinx và y = cosx đều đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. **Chọn B**

e. Khẳng định này là đúng, bởi với phép biến đổi: $y = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ta khẳng định được rằng trên mỗi khoảng hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến. **Chọn A**

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Ta có biến đổi: $\left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có biến đổi:

$$\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{x+\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11\pi}{6} + 10k\pi \\ x = \frac{29\pi}{6} + 10k\pi \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Ta có biến đổi: $\frac{x}{2} = \pm\sqrt{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có biến đổi: $x + \frac{\pi}{18} = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{2}{5} - \frac{\pi}{18} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

a. Trước tiên, ta đi giải phương trình bằng phép biến đổi:

$$\sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Với điều kiện $0 < x < \pi$, ta lần lượt có:

$$0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < k\pi < \frac{\pi}{12} + \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12}$$

$$\overset{k\in Z}{\Rightarrow} k = 1 \Rightarrow \text{nghiệm } x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}.$$

$$0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} < k\pi < -\frac{7\pi}{12} + \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < \frac{5}{12}$$

$$\overset{k\in Z}{\Rightarrow} k = 0 \Rightarrow \text{nghiệm } x_2 = \frac{7\pi}{12} + 0.\pi = \frac{7\pi}{12}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{11\pi}{12}$ và $x_2 = \frac{7\pi}{12}$.

b. Trước tiên, ta đi giải phương trình bằng phép biến đổi:

$$\cos(x - 5) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - 5 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = 5 - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right..$$

Với điều kiện $-\pi < x < \pi$, ta lần lượt có:

$$-\pi < 5 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \pi \Leftrightarrow -\pi - 5 - \frac{\pi}{6} < 2k\pi < \pi - 5 - \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{5}{2\pi} - \frac{1}{12} \approx -1{,}3 < k < \frac{1}{2} - \frac{5}{2\pi} - \frac{1}{12} \approx -0{,}3$$

$$\overset{k\in Z}{\Rightarrow} k = -1 \Rightarrow \text{nghiệm } x_1 = 5 + \frac{\pi}{6} - 2\pi = 5 - \frac{11\pi}{6}.$$

$$-\pi < 5 - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \pi \Leftrightarrow -\pi - 5 + \frac{\pi}{6} < 2k\pi < \pi - 5 + \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{5}{2\pi} + \frac{1}{12} \approx -1,1 < k < \frac{1}{2} - \frac{5}{2\pi} + \frac{1}{12} \approx -0,4$$

$\overset{k\in Z}{\Rightarrow}$ $k = -1 \Rightarrow$ nghiệm $x_2 = 5 - \frac{\pi}{6} - 2\pi = 5 - \frac{13\pi}{6}$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 5 - \frac{11\pi}{6}$ và $x_2 = 5 - \frac{13\pi}{6}$.

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). B; c). C.

a. Ta có biến đổi: $3x = \frac{3\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Đặt $5 = \tan\alpha$, ta có biến đổi:

$$\tan(x - 15^0) = \tan\alpha \Leftrightarrow x - 15^0 = \alpha + k180^0 \Leftrightarrow x = 15^0 + \alpha + k180^0.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Ta có biến đổi:

$$\tan(2x - 1) = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Ta có biến đổi: $2x = -\frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có biến đổi: $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^0\right) = \cot(-30^0) \Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^0 = -30^0 + k180^0$

$$\Leftrightarrow x = -200^0 + k720^0, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Ta có biến đổi: $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5} = \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \cot\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + k\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D; c). D.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{7\pi}{6} - x + 2k\pi \\ 2x = -\frac{7\pi}{6} + x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\tan(2x + 45^0) = \cot(180^0 - \frac{x}{2}) \Leftrightarrow \tan(2x + 45^0) = \tan(90^0 - 180^0 + \frac{x}{2})$$

$$\Leftrightarrow \tan(2x + 45^0) = \tan(\frac{x}{2} - 90^0) \Leftrightarrow 2x + 45^0 = \frac{x}{2} - 90^0 + k180^0$$

$$\Leftrightarrow x = -90^0 + k120^0, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng: $\cos 2x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Trước tiên, ta đi giải phương trình bằng phép biến đổi:

$\tan(2x - 15^0) = \tan 45^0 \Leftrightarrow 2x - 15^0 = 45^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = 30^0 + k90^0$, với $k \in \mathbf{Z}$.

Với điều kiện $-180^0 < x < 90^0$, ta lần lượt có:

$$-180^0 < 30^0 + k90^0 < 90^0 \Leftrightarrow -210^0 < k90^0 < 60^0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{3} < k < \frac{2}{3} \overset{k\in Z}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k_1 = -2 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -150^0 \\ x_2 = -60^0 \\ x_3 = 30^0 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x_1 = -150^0$, $x_2 = -60^0$ và $x_3 = 30^0$.

b. Trước tiên, ta đi giải phương trình bằng phép biến đổi:

$$\cot 3x = \cot(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Với điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, ta lần lượt có:

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{3}{4}$$

$$\overset{k\in Z}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k_1 = -1 \\ k_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = -\frac{4\pi}{9} \text{ và } x_2 = -\frac{\pi}{9}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = -\frac{4\pi}{9}$ và $x_2 = -\frac{\pi}{9}$.

Bài 18: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Trong tam giác vuông HAB, ta có:

$$\sin\widehat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{B} = 45^0 \\ \widehat{B} = 135^0 \end{array}\right. .$$

Trong tam giác vuông HAC, ta có:

$$\sin\widehat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \sin 35^0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{C} \approx 35^0 \\ \widehat{C} \approx 145^0 \end{array}\right. .$$

Giá trị $\widehat{C} \approx 145^0$ không được chấp nhận vì khi đó $\widehat{B} + \widehat{C} > 180^0$, mâu thuẫn, do đó ta luôn có $\widehat{C} \approx 35^0$.

Khi đó:

- Với $\widehat{B} = 45^0$ và $\widehat{C} \approx 35^0$ thì ta được $\widehat{A} = 180^0 - \widehat{B} - \widehat{C} \approx 100^0$.
- Với $\widehat{B} = 135^0$ và $\widehat{C} \approx 35^0$ thì ta được $\widehat{A} = 180^0 - \widehat{B} - \widehat{C} \approx 10^0$.

Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). C; c). B; d). A.

a. Điều kiện để hàm số xác định là:

$$2\sin x + \sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}.$$

Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \backslash \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

b. Điều kiện để hàm số xác định là: $\cos 2x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 1 \\ \cos x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2k\pi \\ x \neq \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{2k\pi}{3}\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

c. Điều kiện để hàm số xác định là:

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

d. Điều kiện để hàm số xác định là:

$$\begin{cases} 2x \neq k\pi \\ \sqrt{3}\cot 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ \cot 2x \neq -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, ta được tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \backslash \{\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Từ giả thiết, ta có: $3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 = 12 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi \Leftrightarrow t = 182k + 80,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Với điều kiện $0 < t \le 365$, ta có:

$$0 < 182k + 80 \le 365 \Rightarrow -\frac{80}{182} < k < \frac{285}{182} \overset{k\in Z}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 80 \\ t_2 = 262 \end{array}\right..$$

Vậy, thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b. Vì $-1 \le \sin\alpha \le 1$ với mọi α nên ta luôn có:

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \ge 3.(-1) + 12 = 9$$

suy ra $d_{Min} = 9$ đạt được khi: $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow t = -11 + 364k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Với điều kiện $0 < t \le 365$, ta có:

$$0 < -11 + 364k \le 365 \Rightarrow \frac{11}{364} < k < \frac{376}{364} \overset{k\in Z}{\Rightarrow} k = 1 \Rightarrow t = 353.$$

Vậy, vào ngày thứ 353 trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất (9giờ).

c. Vì $-1 \le \sin\alpha \le 1$ với mọi α nên ta luôn có:

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \le 3.1 + 12 = 15$$

suy ra $d_{Max} = 15$ đạt được khi: $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow t = 171 + 364k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Với điều kiện $0 < t \le 365$, ta có:

$$0 < 171 + 364k \le 365 \Rightarrow -\frac{171}{364} < k < \frac{194}{364} \overset{k\in Z}{\Rightarrow} k = 0 \Rightarrow t = 171.$$

Vậy, vào ngày thứ 171 trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất (15giờ).

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). D.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{N}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\tan 3x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{N}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0 \\ 2\cos 2x - \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{N}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). B; c). A.

a. Đặt t = cosx điều kiện $|t| \le 1$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{N}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0.$$

Đặt t = sinx điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{3}{2} \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{N}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Đặt t = tanx, ta biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{3}t^2 - (1 + \sqrt{3})t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{N}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(1 - 2\sin^2 x) + 10\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Đặt t = sinx điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{3} \\ t = 2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \overset{x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x \approx -0{,}34.$$

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x = -\frac{3}{4} \overset{x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 2x\in(0;\,\pi)}{\Leftrightarrow} \quad x \approx 1{,}21.$$

c. Đặt $t = \cot x$, ta được:

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = -2 \\ \cot x = 5 \end{array}\right. \overset{(0;\,\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x \approx 2{,}68 \\ x \approx 0{,}2 \end{array}\right..$$

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\tan 3x = \frac{5}{3} \overset{x\in\left(-\frac{\pi}{6};\,\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 3x\in\left(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \quad x \approx 0{,}34.$$

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). D.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = -1$$

đặt $\frac{3}{5} = \cos\alpha$ thì $\frac{4}{5} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$-1 = \cos\alpha.\cos x + \sin\alpha.\sin x = \cos(x - \alpha) \Leftrightarrow x - \alpha = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2} = 2(\sin 2x - \cos 2x) = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{N}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$5\sin 2x - 3(1 + \cos 2x) = 13 \Leftrightarrow 5\sin 2x - 3\cos 2x = 16$$

nhận xét thấy ngay rằng: $a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 < 16^2$

nên phương trình trên vô nghiệm.

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Ta biến đổi:

$$P = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\cos x\right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \alpha)$$

trong đó $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Khi đó, ta có kết luận:

- $P_{Min} = -\sqrt{a^2+b^2}$ đạt được khi $\sin(x+\alpha) = -1$.
- $P_{Max} = \sqrt{a^2+b^2}$ đạt được khi $\sin(x+\alpha) = 1$.

b. Ta biến đổi: $Q = \sin^2x + \sin x.\cos x + 3\cos^2x$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos2x) + \frac{1}{2}\sin2x + \frac{3}{2}(1+\cos2x) = \frac{1}{2}\sin2x + \cos2x + 2$$

$$= 2 + \frac{\sqrt5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt5}.\sin2x + \frac{2}{\sqrt5}.\cos2x\right) = 2 + \frac{\sqrt5}{2}\sin(2x+\alpha)$$

trong đó $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt5}$ và $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt5}$.

Khi đó, ta có kết luận:

- $Q_{Min} = 2 - \dfrac{\sqrt5}{2}$ đạt được khi $\sin(2x+\alpha) = -1$.
- $Q_{Max} = 2 + \dfrac{\sqrt5}{2}$ đạt được khi $\sin(2x+\alpha) = 1$.

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). B; c). B.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 - \cos2x + \frac{3\sqrt3}{2}\sin2x - \frac{1}{2}(1+\cos2x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt3}{2}\sin2x - \frac{3}{2}\cos2x = \frac{7}{2}. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng:

$$\left(\frac{3\sqrt3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{36}{4} < \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{phương trình (1) vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $2 = 4$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$2\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan x - 1 = \frac{4}{\cos^2 x} = 4(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0.$$

Đặt $t = \tan x$, ta biến đổi phương trình về dạng: $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 5 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $3 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$3\tan^2 x + 8\tan x + 8\sqrt{3} - 9 = 0.$$

Đặt $t = \tan x$, ta biến đổi phương trình về dạng: $3t^2 + 8t + 8\sqrt{3} - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{3} \\ t = \sqrt{3} - \frac{8}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3}) \\ \tan x = \sqrt{3} - \frac{8}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan(\sqrt{3} - \frac{8}{3}) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin 2x - 3\cos 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

đặt $\frac{2}{\sqrt{13}} = \cos 2\alpha$ thì $\frac{3}{\sqrt{13}} = \sin 2\alpha$, khi đó ta được:

$$\cos 2\alpha.\sin 2x - \sin 2\alpha.\cos 2x = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \sin(2x - 2\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi \\ 2x - 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\alpha + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $1 = \frac{1}{2}$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$\tan^2 x + 2\tan x - 2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0.$$

Đặt $t = \tan x$, ta biến đổi phương trình về dạng: $t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). B.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + 2k\pi \\ 4x = -2x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(\sin 9x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 9x = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x = 5x + 2k\pi \\ 9x = \pi - 5x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 28: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 4x = \sin 6x - \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = 2\cos 4x.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos4x - \cos2x).\sin2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 4x = \cos 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ 4x = 2x + 2k\pi \\ 4x = -2x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin2x = \sin6x - \sin4x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = 2\cos5x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (\cos5x - \cos x).\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 5x = \cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 5x = x + 2k\pi \\ 5x = -x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin2x - \cos2x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} - x + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). D.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos8x) + \frac{1}{2}(1 - \cos6x) = \frac{1}{2}(1 - \cos4x) + \frac{1}{2}(1 - \cos2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos8x + \cos6x = \cos4x + \cos2x \Leftrightarrow 2\cos7x.\cos x = 2\cos3x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos7x - \cos3x).\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x = 3x + 2k\pi \\ 7x = -3x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos x + 2\cos 7x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 7x + \cos 3x).\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 7x = -\cos 3x = \cos(\pi - 3x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x = \pi - 3x + 2k\pi \\ 7x = -\pi + 3x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài 30: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x = \dfrac{x}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $\tan(2x + 10^0) = -\cot x = \tan(x - 90^0)$

$$2x + 10^0 = x - 90^0 + k180^0 \Leftrightarrow x = -100^0 + k180^0,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). C; c). C.

a. Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t = \tan x$ thì $\sin 2x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, khi đó phương trình có dạng:

$$(1 - t)\left(1 + \frac{2t}{1 + t^2}\right) = 1 + t \Leftrightarrow (1 - t)(1 + t)^2 = (1 + t)(1 + t^2)$$

$$\Leftrightarrow [(1 - t)(1 + t) - (1 + t^2)](1 + t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2(1 + t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 = \tan(-\dfrac{\pi}{4}) \\ \tan x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\sin^2x+\cos^2x+2\sin x.\cos x)=1+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow [(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-1](\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2x-\sin^2x-1)(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x-1=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x.\cos x}=\sin 3x.\cos x \Leftrightarrow \sin 3x=\sin 3x.\cos 2x\cos^2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x\cos^2x-1)\sin 3x=0 \Leftrightarrow (2\cos^4x-\cos^2x-1)\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2x=1\\ \cos^2x=-1/2 \text{ loại}\\ \sin 3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin 3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Điều kiện $x\neq\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=2\cot 4x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin 2x.\cos x}=\frac{2\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=2\cos 4x.\sin 2x \Leftrightarrow \cos 2x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=2x+2k\pi\\ 4x=-2x+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi \text{ loại}\\ x=\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Nghiệm nhận được $x=\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$ chỉ thoả mãn điều kiện (*) khi k không chia hết cho 3.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$ và k không chia hết cho 3.

Bài 32: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - (1 - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. (*)

Đặt $t = \tan x + \cot x$ điều kiện $|t| \geq 2$, khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ loại} \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x + \frac{1}{2}(1 - \cos x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài 33: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). D.

a. Trước tiên, ta đi giải phương trình bằng cách biến đổi:

$$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 3)\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^0 + k180^0,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Với điều kiện $0^0 \leq x \leq 360^0$, ta có:

$$0^0 \leq 90^0 + k180^0 \leq 360^0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \overset{k \in Z}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 90^0 \\ x = 270^0 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 90^0$ và $x = 270^0$.

b. Điều kiện $x \neq k90^0$, $k \in \mathbf{Z}$. (*)

Đặt $t = \tan x$, khi đó phương trình có dạng:

$$t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 45^0 + k180^0 \\ x \approx 63{,}435^0 + k180^0 \end{array}\right. \overset{180^0 \leq x \leq 360^0}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 225^0 \\ x \approx 243{,}435^0 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 225^0$ và $x \approx 243{,}435^0$.

Bài 34: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $3\sin^2x - 2\sin x.\cos x - \cos^2x = 0$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $3 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x \neq 0$, ta được: $3\tan^2x - 2\tan x - 1 = 0$.

Đặt $t = \tan x$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \\ \tan x = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-\frac{1}{3}) + k\pi \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $3 = 2$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 2x \neq 0$, ta được:

$$3\tan^2 2x - \tan 2x - 4 = 2(1 + \tan^2 2x) \Leftrightarrow \tan^2 2x - \tan 2x - 6 = 0.$$

Đặt $t = \tan 2x$, ta biến đổi phương trình về dạng: $t^2 - t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = -2 \\ \tan 2x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\arctan 3 + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng

$2 = -1$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$2\tan^2 x + (3 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} - 1 = -(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + (3 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0.$$

Đặt t = tanx, ta biến đổi phương trình về dạng: $3t^2 + (3 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4}) \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(-\frac{\pi}{6}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). C.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x - \cos x) + (\sin 2x - \cos 2x) + (\sin 3x - \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + [\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x - \frac{\pi}{4})] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + 2\sin(2x - \frac{\pi}{4}).\cos x = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\cos x)\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 5x = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Điều kiện $\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{2\sin 2x.\cos 2x} \Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z} \qquad \text{(I)}$$

tuy nhiên, nghiệm trong hệ (I) vi phạm điều kiện (*)

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Điều kiện $\sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. (**)

Biến đổi phương trình về dạng: $\sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2}$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z} \qquad \text{(II)}$$

nghiệm trong hệ (II) thoả mãn điều kiện (**)

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). C.

a. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{2}.$$

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng $2 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Trường hợp 2: Với cosx ≠ 0 ⇔ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x \neq 0$, ta được: $2\tan^2x + 3\tan x + 1 = 0$.
Đặt t = tanx, ta biến đổi phương trình về dạng: $2t^2 + 3t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-\frac{1}{2}) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 - \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 2\sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \ (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2\cos^2 x}{\cos x} = \frac{2\sin x.\cos x}{2\sin^2 x} \Leftrightarrow 2\cos x.\sin x = \cos x \overset{\cos x \neq 0}{\Leftrightarrow} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z} \text{ – thoả mãn điều kiện } (*).$$

b. *Hướng dẫn*: Điều kiện: $2\cos x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 2 \Leftrightarrow t \neq 2$. (*)

Thay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ vào phương trình, ta được $\frac{\pm 1}{\mp 1} = -1$, đúng.

Vậy, giá trị $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nghiệm đúng phương trình.

Xét với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Chia cả tử và mẫu của VT cho $\cos^3x \neq 0$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\tan^3 x + 1}{(2 - \tan x).\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos 2x \Leftrightarrow \frac{\tan^3 x + 1}{(2 - \tan x)(1 + \tan^2 x)} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan^3 x + 1}{2 - \tan x} = 1 - \tan^2 x \Leftrightarrow t^3 + 1 = (2 - t)(1 - t^2)$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)[t^2 - t + 1 - (2 - t)(1 - t)] = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1/2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta đi biến đổi:

$$5\sin 6t - 4\cos 6t = \sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin 6t - \frac{4}{\sqrt{41}}\cos 6t\right)$$

đặt $\frac{5}{\sqrt{41}} = \cos\alpha$ thì $\frac{4}{\sqrt{41}} = \sin\alpha$ chọn $\alpha \approx 0,675$, khi đó ta được:

$$5\sin 6t - 4\cos 6t = \sqrt{41}\,(\sin 6t.\cos\alpha - \cos 6t.\sin\alpha) = \sqrt{41}\,\sin(6t - \alpha).$$

a. Trong 1 giây đầu tiên ($0 \le t \le 1$), vật ở vị trí cân bằng khi h đạt giá trị nhỏ nhất, tức là: $\sin(6t-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin(6t-\alpha) = 0 \Leftrightarrow 6t - \alpha = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\alpha}{6} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{N}$.

Với điều kiện $0 \le t \le 1$, ta được:

$$0 \le \frac{\alpha}{6} + \frac{k\pi}{6} \le 1 \overset{\alpha\approx 0,675}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 \approx 0,11\ (s) \\ t_2 \approx 0,64\ (s) \end{array}\right..$$

Vậy, ở vào thời điểm $t \approx 0,11$ (s) hoặc $t \approx 0,64$ (s) trong 1 giây đầu tiên, vật ở vị trí cân bằng.

b. Trong 1 giây đầu tiên ($0 \le t \le 1$), vật ở xa vị trí cân bằng nhất khi h đạt giá trị lớn nhất, tức là: $\sin(6t-\alpha) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(6t-\alpha) = 0 \Leftrightarrow 6t - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Rightarrow t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{N}.$$

Với điều kiện $0 \le t \le 1$, ta được:

$$0 \le \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \le 1 \overset{\alpha\approx 0,675}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_3 \approx 0,37\ (s) \\ t_4 \approx 0,9\ (s) \end{array}\right..$$

Vậy, ở vào thời điểm $t \approx 0,37$ (s) hoặc $t \approx 0,9$ (s) trong 1 giây đầu tiên, vật ở xa vị trí cân bằng nhất.

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Trong 2 giây đầu tiên ($0 \le t \le 2$), người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất khi h đạt giá trị lớn nhất, tức là: $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}, k \in \mathbf{N}.$$

Với điều kiện $0 \le t \le 2$, ta được: $0 \le \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \le 2$

$$\overset{k\in Z}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \Rightarrow t_1 = 0,5\ (s) \text{ hoặc } t_2 = 2\ (s).$$

Vậy, ở vào thời điểm $t = 0,5$ (s) hoặc $t = 2$ (s) trong 2 giây đầu tiên, người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

b. Trong 2 giây đầu tiên ($0 \le t \le 2$), người chơi đu cách vị trí cân bằng 2m, tức là:

$$3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 2 \Leftrightarrow \cos^2\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = -\frac{1}{9} \approx \cos(0{,}535\pi)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2\pi}{3}(2t-1) \approx 0{,}535\pi + 2k\pi \\ \dfrac{2\pi}{3}(2t-1) \approx -0{,}535\pi + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 0{,}9 + \dfrac{3k}{2} \\ t \approx 0{,}1 + \dfrac{3k}{2} \end{array}\right., k \in \mathbf{N}.$$

Với điều kiện $0 \le t \le 2$, ta lần lượt có: $0 \le 0{,}9 + \dfrac{3k}{2} \le 2 \overset{k \in N}{\Rightarrow} k = 0 \Rightarrow t_1 = 0{,}9$ (s).

$$0 \le 0{,}1 + \frac{3k}{2} \le 2 \overset{k \in N}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \Rightarrow t_2 = 0{,}1 \text{ (s) hoặc } t_2 = 1{,}6 \text{ (s)}.$$

Vậy, ở vào thời điểm t = 0,1 (s) hoặc t = 0,9 (s) hoặc t = 1,6 (s) trong 2 giây đầu tiên, người chơi đu cách vị trí cân bằng 2m.

CHƯƠNG II.

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§1 HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. QUY TẮC CỘNG

Quy tắc cộng: *Giả sử một công việc có thể tiến hành theo một trong* k *phương án* $A_1, A_2, ..., A_k$. *Nếu:*

- *Phương án* A_1 *có thể làm bằng* n_1 *cách.*
- *Phương án* A_2 *có thể làm bằng* n_2 *cách.*
- ...
- *Phương án* A_k *có thể làm bằng* n_k *cách.*

Khi đó, có công việc có thể thực hiện theo $n_1 + n_2 + ... + n_k$ *cách.*

2. QUY TẮC NHÂN

Quy tắc nhân: *Giả sử một công việc A bao gồm* k *công đoạn* $A_1, A_2, ..., A_k$. *Nếu:*

- *Công đoạn* A_1 *có thể làm bằng* n_1 *cách.*
- *Công đoạn* A_2 *có thể làm bằng* n_2 *cách.*
- ...
- *Công đoạn* A_k *có thể làm bằng* n_k *cách.*

Khi đó, có công việc có thể thực hiện theo $n_1.n_2...n_k$ *cách.*

3. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần . Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là nguyên lý bù trừ.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1: Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo) ?

A. 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Bài 2: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây ?

A. 16. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 4.

Bài 3: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?

A. 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

Bài 4: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.

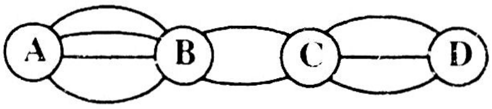
a. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

A. 605. **B.** 325. **C.** 280. **D.** 45.

b. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

A. 910000. **B.** 91000. **C.** 9100. **D.** 910.

Bài 5: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình bên. Hỏi:



a. Có bao nhiêu cách đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần ?

A. 36. **B.** 28. **C.** 24. **D.** 18.

b. Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A ?

A. 1296. **B.** 784. **C.** 576. **D.** 324.

Bài 6: Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a. Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau) ?

A. 324. **B.** 256. **C.** 248. **D.** 124.

b. Có 4 chữ số khác nhau.

A. 36. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 14.

Bài 7: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

a. Một chữ số ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

b. Hai chữ số ?

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 16.

c. Hai chữ số khác nhau ?

A. 20. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 8.

Bài 8: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?

A. 80. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

§2 HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HOÁN VỊ

Định nghĩa 1: *Cho tập hợp* A, *gồm* n *phần tử* (n ≥ 1). *Một cách sắp thứ tự* n *phần tử của tập hợp* A *được gọi là một hoán vị của* n *phần tử đó.*

Định lí 1: *Nếu kí hiệu số hoán vị của* n *phần tử là* P_n, *thì ta có:*

$$P_n = n! = 1.2.3\ldots(n-1).n.$$

2. CHỈNH HỢP

Định nghĩa 2: *Cho tập hợp* A *gồm* n *phần tử. Một bộ gồm* k (1 ≤ k ≤ n) *phần tử sắp thứ tự của tập hợp* A *được gọi là một chỉnh hợp chập* k *của* n *phần tử của* A.

Nhận xét:

1. Hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi: hoặc có ít nhất một phần tử của chỉnh hợp này mà không là phần tử của chỉnh hợp kia, hoặc các phần tử của hai chỉnh hợp giống nhau nhưng được sắp xếp theo thứ tự khác nhau.
2. Bộ k phần tử có kể thứ tự được hiểu như sau: giả sử a, b là hai bộ k phần tử của tập E: $a = (a_1, a_2,..., a_k)$ và $b = (b_1, b_2,..., b_k)$
   - a, b được coi là có kể thứ tự nếu: $a = b \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = \overline{1,k}$.
   - a, b được coi là không kể thứ tự nếu:

     $a = b \Leftrightarrow$ mỗi a_i trùng với một b_j nào đó $i, j = \overline{1,k}$.

Định lí 2: *Nếu kí hiệu số chỉnh hợp chập* k *của* n *phần tử là* A_n^k, *thì ta có*:

$$A_n^k = n.(n-1)...(n-k+1).$$

Chú ý:

1. Ta có thể viết A_n^k theo cách khác: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n\text{-}k)!}$
2. Nếu k = n thì: $A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n! = P_n$.

   Như vậy, một chỉnh hợp n chập n được gọi là một hoán vị của n phần tử.

   Từ đó, suy ra: $A_n^n = A_n^k . A_{n-k}^{n-k}$, với mọi $1 \le k \le n$.

   Kết quả này được phát biểu là " *Số các hoán vị của n phần tử phân biệt bằng số các chỉnh hợp n chập r của các phần tử đó, nhân với số các hoán vị của (n – r) phần tử còn lại* ".

3. TỔ HỢP

Định nghĩa 3: *Cho tập hợp* A *gồm* n *phần tử. Một tập con của* E, *gồm* k *phần tử phân biệt* ($1 \le k \le n$), *được gọi là một tổ hợp chập* k *của* n *phần tử của* A.

Định lí 3: *Nếu kí hiệu số tổ hợp chập* k *của* n *phần tử là* C_n^k, *thì ta có*:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, \qquad (1)$$

với $0 \le k \le n$ và quy ước $C_n^0 = 1$. Từ kết quả của định lí 3 suy ra:

a. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, với $0 \le k \le n$. (2)

b. $C_n^k = C_n^{n-k}$, với $0 \le k \le n$. (3)

c. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, với $0 \le k \le n$. (4)

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 9: Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng ? (giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).

A. 120. **B.** 100. **C.** 80. **D.** 60.

Bài 10: Trong không gian cho tập hợp gồm 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với đỉnh thuộc tập hợp đã cho ?

A. 136. **B.** 126. **C.** 116. **D.** 106.

Bài 11: Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a. Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào Uỷ ban thường trực ?

A. 1265. **B.** 12650. **C.** 126500. **D.** 1265000.

b. Có bao nhiêu cách chọn Chủ tịch, Phó chủ tịch và Thủ quỹ ?

A. 18300. **B.** 13008. **C.** 13080. **D.** 13800.

Bài 12: Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba ?

A. 336. **B.** 326. **C.** 316. **D.** 306.

Bài 13: Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi:

a. Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P.

A. $\frac{n^2-1}{2}$. **B.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **C.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **D.** $\frac{n^2+1}{2}$.

b. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà điểm đầu và điểm cuối thuộc P ?

A. $n^2 - 1$. **B.** $n(n - 1)$. **C.** $n(n - 1)$. **D.** $n^2 + 1$.

Bài 14: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ.

a. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn.

A. 7. **B.** 10. **C.** 21. **D.** 35.

b. Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ: Bí thư, Phó bí thư, Uỷ viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 210. **B.** 200. **C.** 180. **D.** 150

Bài 15: Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi có bao nhiêu phương án trả lời ?

A. 1048567. **B.** 1048576. **C.** 1048756. **D.** 1047856.

Bài 16: Có bao nhiêu số tự nhiêu có 6 chữ số và chia hết cho 5 ?

A. 18000. **B.** 180000. **C.** 1800000. **D.** 18000000.

Bài 17: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau.

a. Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

A. 1635. **B.** 1536. **C.** 1356. **D.** 1365.

b. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

A. 2730. **B.** 2703. **C.** 2073. **D.** 2370.

Bài 18: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có bốn giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc cong bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi:

a. Có bao nhiêu kết quả có thể ?

A. 94109040. **B.** 94109400. **C.** 94104900. **D.** 94410900.

b. Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất ?

A. 944109. **B.** 941409. **C.** 941094. **D.** 941049.

c. Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải ?

A. 3766437. **B.** 3764637. **C.** 3764367. **D.** 3764376.

Bài 19: Một tổ có 8 em nam và 2 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong tổ tham dự cuộc thi học sinh thanh lịch của trường. Yêu cầu trong các em được chọn, phải có ít nhất một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

A. 196. **B.** 186. **C.** 166. **D.** 156.

Bài 20: Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kĩ sư. Để lập một tổ công tác, cần chọn một kĩ sư làm tổ trưởng, một công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. 3780. **B.** 3680. **C.** 3760. **D.** 3520.

Bài 21: Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 5 em được chọn, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

A. 156. **B.** 126. **C.** 116. **D.** 86.

Bài 22: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số (không nhất thiết phải khác nhau) ?

A. 184. **B.** 148. **C.** 168. **D.** 186.

Bài 23: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau ?

A. 18. **B.** 20. **C.** 22. **D.** 24.

Bài 24: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên khác 0)?

A. 1250. **B.** 1260. **C.** 1280. **D.** 1270.

Bài 25: Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái sang phải) bằng:

A. 120. **B.** 168. **C.** 204. **D.** 216.

Bài 26: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \dfrac{5!}{m(m+1)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{3!(m-1)!}$.

A. $A = 5$. **B.** $A = 10$. **C.** $A = 15$. **D.** $A = 20$.

b. $B = \left(\dfrac{P_5}{A_5^4} + \dfrac{P_4}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_2}{A_5^1} \right) A_5^2$.

A. $B = 24$. **B.** $B = 42$. **C.** $B = 64$. **D.** $B = 81$.

c. $C = (P_n)^3 . C_n^n C_{2n}^n C_{3n}^n$.

A. $C = n!$. **B.** $C = 2n!$. **C.** $C = 3n!$. **D.** $C = 4n!$.

Bài 27: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0$.

A. $A = 81$. **B.** $A = 72$. **C.** $A = 39$. **D.** $A = 33$.

b. $B = \dfrac{6!}{(m-2)(m-3)} \left[\dfrac{1}{(m+1)(m-4)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{(m-5)!.5!} - \dfrac{(m-1)!.m}{12(m-4)!.3!} \right]$.

với $m = 101$.

A. $B = -40400$. **C.** $B = -30400$.

B. $B = -40300$. **D.** $B = -30300$.

c. $C = \dfrac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \dfrac{A_3^2}{P_2}$.

A. $C = 1$. **B.** $C = 3$. **C.** $C = 4$. **D.** $C = 7$.

Bài 28: Giải các phương trình sau:

a. $P_2 x^2 - P_3 x = 8$.

A. $x = -1$ và $x = 4$. **C.** $x = -2$ và $x = 4$.

B. $x = -1$ và $x = 1$. **D.** $x = -2$ và $x = 2$.

b. $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

A. $x = -3$ và $x = 4$. **C.** $x = 3$ và $x = -4$.

B. $x = 3$ và $x = 4$. **D.** $x = -3$ và $x = -4$.

c. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-10} = 1023$.

A. $x = 8$. **B.** $x = 10$. **C.** $x = 12$. **D.** $x = 16$.

Bài 29: Tìm các số n nguyên dương thoả mãn:

a. $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$.

A. $n = 1, n = 2$ và $n = 3$. **C.** $n = 3, n = 4$ và $n = 5$.

B. $n = 2, n = 3$ và $n = 4$. **D.** $n = 1, n = 4$ và $n = 8$.

b. $C_{n-1}^{4} - C_{n-1}^{3} - \frac{5}{4}A_{n-2}^{2} < 0, n \in \mathbb{Z}$.

A. $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **C.** $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

B. $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. **D.** $n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Bài 30: Định x và y sao cho:

a. $C_{x+1}^{y} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y-1} = 6 : 5 : 2$.

A. (1; 4). **B.** (4; 1). **C.** (3; 8). **D.** (8; 3).

b. $(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}) : A_{x}^{y-1} : C_{x}^{y-1} = 10 : 2 : 1$.

A. (2; 1). **B.** (2; 2). **C.** (3; 7). **D.** (7; 3).

§3 NHỊ THỨC NIU–TƠN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Ở lớp 8 chúng ta đã được làm quen với các hằng đẳng thức:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^{2-0}b^0 + C_2^1 a^{2-1}b^1 + C_2^2 a^0 b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^{3-0}b^0 + C_3^1 a^{3-1}b^1 + C_3^2 a^{3-2}b^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Tổng quát: Với mọi cặp số a, b và mọi số n nguyên dương, ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k .$$

Công thức trên được gọi là ***công thức nhị thức Niu – tơn*** (gọi tắt là ***nhị thức Niu – tơn***)

Nhận xét công thức nhị thức niutơn

1. Số các số hạng ở bên phải của công thức bằng n + 1, n là số mũ của nhị thức ở vế trái.
2. Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.
3. Số hạng tổng quát có dạng: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$, với $k = 0, 1, \ldots, n$.

   đó là số hạng thứ k + 1 trong sự khai triển của nhị thức $(a+b)^n$.

   Như vậy, với yêu cầu "*Tìm hệ số của* $a^{n-k}b^k$" thì câu trả lời là C_n^k.
4. Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau vì:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, 0 \le k \le n.$$

2. MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

Dạng 1: Thay a = 1 và b = x vào (1), ta được:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (2)$$

Dạng 2: Thay a = 1 và b = −x vào (1), ta được:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^k C_n^k x^k + ... + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (3)$$

Khi đó:

- Thay x = 1 vào (2), ta được: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$.
- Thay x = 1 vào (3), ta được: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$.

3. TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của khai triển Niutơn của nhị thức $(a + b)^n$ có thể được sắp xếp thành tam giác sau đây (gọi là *tam giác Pascal*):

n = 0 1
n = 1 1 1
n = 2 1 2 1
n = 3 1 3 3 1
n = 4 1 4 6 4 1
n = 5 1 5 10 10 5 1
n = 6 1 6 15 20 15 6 1
. . .

Như vậy, dựa vào bảng ta có: $C_4^1 = C_4^3 = 4$, $C_4^2 = 6$.

$C_5^1 + C_5^2 = C_6^2$ (chúng ta đã từng được biết $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$).

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 31 Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển $(3x + 2y)^{17}$.

A. $C_{17}^8 3^8.2^9$. **B.** $C_{17}^8 3^9.2^8$. **C.** $C_{17}^8 3^8.2^8$. **D.** $C_{17}^8 3^9.2^9$.

Bài 32 Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x - 3y)^{200}$.

A. $C_{200}^{99} 2^{101}.3^{99}$. **C.** $C_{200}^{99} 2^{99}.3^{101}$.

B. $-C_{200}^{99} 2^{101}.3^{99}$. **D.** $-C_{200}^{99} 2^{99}.3^{101}$.

Bài 33 Tìm hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x + y)^{13}$.

A. 1247. **B.** 1267. **C.** 1287. **D.** 1297.

Bài 34 Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1 + x)^{11}$.

A. 300. **B.** 310. **C.** 320. **D.** 330.

Bài 35 Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(2 - x)^{19}$.

A. −94595072. **C.** 94595072.

B. −94595720. **D.** 94595720.

Bài 36 Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(3 - 2x)^{15}$.

A. $-C_{15}^7 3^7 2^8$. **B.** $-C_{15}^7 3^8 2^7$. **C.** $C_{15}^7 3^8 2^7$. **D.** $C_{15}^7 3^7 2^8$.

Bài 37 Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$.

A. 1001. **B.** 2002. **C.** 3003. **D.** 4004.

Bài 38: Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

A. n = 24. **B.** n = 28. **C.** n = 30. **D.** n = 32.

Bài 39: Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ là 90, tìm n.

A. n = 3. **B.** n = 4. **C.** n = 5. **D.** n = 8.

Bài 40: Tìm hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn đa thức:

$$(1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + \ldots + (1 + x)^{14}.$$

A. 3001. **B.** 3003. **C.** 3010. **D.** 2901.

Bài 41: Đặt: $(x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}$.

a. Tính hệ số a_{97}.

A. −1293600. **B.** 1293600. **C.** −931600. **D.** 931600.

b. Tính tổng $S_1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$.

A. $S_1 = 1$. **B.** $S_1 = -1$. **C.** $S_1 = 2$. **D.** $S_1 = -2$.

Bài 42: Đặt: $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{15}x^{15}$.

a. Tính hệ số a_{10}.

A. 101. **B.** 202. **C.** 303. **D.** 404.

b. Tổng $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}$.

A. $S_1 = 1024$. **B.** $S_1 = -1024$. **C.** $S_1 = 256$. **D.** $S_1 = -256$.

c. Tổng $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots - a_{15}$.

A. $S_2 = 0$. **B.** $S_2 = -1$. **C.** $S_2 = 2$. **D.** $S_2 = -2$.

Bài 43: Tính giá trị của biểu thức: $A = 2^8.3^8C_8^0 + 2^7.3^7C_8^1 + \ldots + C_8^8$.

A. 16807. **B.** 117649. **C.** 823543. **D.** 5764801.

Bài 44: Tính giá trị của biểu thức: $B = 2^9.5^9C_9^0 - 2^8.5^8.3C_9^1 + \ldots + 3^9C_9^9$.

A. 117649. **B.** 823543. **C.** 5764801. **D.** 40353607.

Bài 45: Tính giá trị của biểu thức: $S = 2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + \ldots + C_n^n$.

A. $S = \frac{3^n + 1}{2}$. **B.** $S = \frac{3^n - 1}{2}$. **C.** $S = \frac{3^n}{2}$. **D.** $S = \frac{3^{n+1}}{2}$.

§4 BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. BIẾN CỐ

***Định nghĩa**: (Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu):*

a. Một ***phép thử ngẫu nhiên*** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:

- Có thể lặp đi lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau.
- Kết quả của nó không dự đoán trước được.
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

b. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô – mê – ga).

Biến cố liên quan đến phép thử: Một biến cố A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu Ω của phép thử đó. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc tập Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A được gọi là một ***kết quả thuận lợi*** cho A.

- *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.
- *Biến cố không thể* là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử T được thực hiện. Biến cố không được mô tả bởi tập ∅ và được kí hiệu là ∅.

2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa cổ điển của xác suất: Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan tới phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A) được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}, \qquad (1)$$

trong đó $|\Omega_A|$ và $|\Omega|$ lần lượt là số phần tử của tập Ω_A và Ω.

Chú ý: Từ định nghĩa trên suy ra: - $0 \le P(A) \le 1$.

- $P(\Omega) = 1$ và $P(\varnothing) = 0$.

Định nghĩa thống kê của xác suất: Xét phép thử T và biến cố A liên quan tới phép thử đó. Ta tiến hành lặp đi lặp lại N phép thử T và thống kê xem biến cố A xuất hiện bao nhiêu lần.

- Số lần xuất hiện biến cố A được gọi là ***tần số*** của A trong N lần thực hiện phép thử T.
- Tỉ số giữa tần số của A với số N được gọi là ***tần suất*** của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Khi số lần thử N càng lớn thì tần xuất của A càng gần với một số xác định, số đó được gọi là xác suất của A theo nghĩa thống kê.

IV. BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài 46: Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 50.

a. Mô tả không gian mẫu.

b. Gọi A là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho A.

c. Tính xác suất của A.

A. 0,3. **B.** 0,35. **C.** 0,4. **D.** 0,45.

d. Tính xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4.

A. 0,56. **B.** 0,06. **C.** 0,04. **D.** 0,54.

Bài 47: Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để:

a. Số được chọn là số nguyên tố.

A. 0,3. **B.** 0,4. **C.** 0,5. **D.** 0,6.

b. Số được chọn chia hết cho 3.

A. 0,5. **B.** 0,45. **C.** 0,35. **D.** 0,25.

Bài 48: Danh sách lớp của Hường được đánh số từ 1 đến 30. Hường có số thứ tự là 12. Chọn ngẫu nhieu một bạn trong lớp.

a. Tính xác suất để Hường được chọn.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

b. Tính xác suất để Hường không được chọn.

A. $\frac{23}{30}$. **B.** $\frac{29}{30}$. **C.** $\frac{19}{30}$. **D.** $\frac{17}{30}$

c. Tính xác suất để một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường được chọn.

A. $\frac{19}{30}$. **B.** $\frac{17}{30}$. **C.** $\frac{11}{30}$. **D.** $\frac{13}{30}$

Bài 49: Gieo hai con súc sắc cân đối.

a. Mô tả không gian mẫu.

b. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7". Tính P(A).

A. $\frac{11}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{1}{12}$

c. Cũng câu hỏi như câu b) cho các biến cố B: "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm".

A. $\frac{17}{36}$. **B.** $\frac{13}{36}$. **C.** $\frac{11}{36}$. **D.** $\frac{7}{36}$.

d. Cũng câu hỏi như câu b) cho các biến cố C: "Có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm".

A. $\frac{13}{18}$. **B.** $\frac{11}{18}$. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{5}{18}$.

Bài 50: Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong một danh sách 20 người được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10.

A. 0,016. **B.** 0,026. **C.** 0,036. **D.** 0,046.

Bài 51: Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh có tên trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 001 đến 199. Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự:

a. Từ 001 đến 099 (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

A. 0,019. **B.** 0,029. **C.** 0,039. **D.** 0,049.

b. Từ 150 đến 199 (tính chính xác đến hàng phần vạn).

A. 0,0004. **B.** 0,0006. **C.** 0,0008. **D.** 0,0009.

Bài 52: Một cái túi có 4 quả cầu màu đỏ, 6 quả cầu màu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong bốn quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

A. $\frac{89}{105}$. B. $\frac{91}{105}$. C. $\frac{97}{105}$. D. $\frac{98}{105}$.

Bài 53: Chiếc kim của bánh xe trong tròn chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau.

A. $\frac{24}{49}$. B. $\frac{26}{49}$. C. $\frac{28}{49}$. D. $\frac{30}{49}$.

Bài 54: Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2.

A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

Bài 55: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiêu bé hơn 1000. Tính xác suất để số đó:

a. Chia hết cho 3.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{33}$. C. $\frac{1}{333}$. D. $\frac{1}{3333}$.

b. Chia hết cho 5.

A. $\frac{199}{9999}$. B. $\frac{199}{999}$. C. $\frac{19}{999}$. D. $\frac{19}{99}$.

§5 CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

Định nghĩa biến cố hợp: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là ***hợp của hai biến cố*** A và B.

Nếu gọi: ▪ Ω_A là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A,

▪ Ω_B là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho B,

thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là ***hợp của*** k ***biến cố*** đó.

Định nghĩa biến cố xung khắc: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Quy tắc cộng xác suất:

1. Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
2. Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc với nhau thì xác suất để ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra là:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

Định nghĩa biến cố đối: Cho biến cố A khi đó biến cố "không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của A.

Chú ý: Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.

Định lí: Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

Định nghĩa biến cố giao: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là ***giao của hai biến cố*** A và B.

Nếu gọi Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp mô tả các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. Biến cố "tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2A_k$, được gọi là ***giao của*** k ***biến cố*** đó.

Định nghĩa biến cố độc lập: Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến một phép thử T. Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Một cách tổng quát: Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ cùng liên quan đến một phép thử T. k biến cố này được gọi là ***độc lập*** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới việc xảy ra hay không xảy ra của các biến cố còn lại.

Nhận xét: Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

Quy tắc nhân xác suất:

1. Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì xác suất để A và B xảy ra là:
   $P(AB) = P(A).P(B)$.
2. Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập với nhau thì:
   $P(A_1A_2A_k) = P(A_1).P(A_2).P(A_k)$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 56: Gieo ba đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để:

a. Cả ba đồng xu đều sấp.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

b. Có ít nhất một đồng xu sấp.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

c. Có đúng một đồng xu sấp.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

Bài 57: Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn độc lập:

a. Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần.

A. 0,384. **B.** 0,488. **C.** 0,484. **D.** 0,588.

b. Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần.

A. 0,588. **B.** 0,488. **C.** 0,384. **D.** 0,284.

Bài 58: Gieo hai đồng xu A và B một cách độc lập. Đồng xu A chế tạo cân đối. Đồng xu B chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp 3 lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để:

a. Khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

b. Khi gieo hai đồng xu hai lần thì cả hai đồng xu đều ngửa.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Bài 59: Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài này có ít nhất một quân át.

A. $1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5}$. **B.** $\frac{C_{48}^5}{C_{52}^5}$. **C.** $\frac{C_{44}^5}{C_{52}^5}$. **D.** $1 - \frac{C_{44}^5}{C_{52}^5}$.

Bài 60: Có hai hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 3.

A. $\dfrac{3}{25}$. **B.** $\dfrac{24}{25}$. **C.** $\dfrac{1}{25}$. **D.** $\dfrac{22}{25}$.

Bài 6 Có ba hòm, chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để:

a. Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4.

A. $\dfrac{124}{125}$. **B.** $\dfrac{24}{125}$. **C.** $\dfrac{101}{125}$. **D.** $\dfrac{1}{125}$.

b. Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 6.

A. $\dfrac{12}{125}$. **B.** $\dfrac{10}{125}$. **C.** $\dfrac{8}{125}$. **D.** $\dfrac{6}{125}$.

Bài 62: Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu.

A. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$. **C.** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$. **D.** $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{10}$.

Bài 63: Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12.

A. $\dfrac{23}{144}$. **B.** $\dfrac{17}{144}$. **C.** $\dfrac{15}{144}$. **D.** $\dfrac{1}{144}$.

Bài 64: Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng một trận là 0,44. Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để trong loạt chơi đó xác suất An thắng ít nhất một trận lớn hơn 0,95 ?

A. 8 trận. **B.** 6 trận. **C.** 4 trận. **D.** 2 trận.

Bài 65: Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,01	0,09	0,3	0,3	0,2	0,1

Tính xác suất để:

a. Trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi.

A. 0,9. **B.** 0,7. **C.** 0,5. **D.** 0,3.

b. Trên trang sách có ít nhất 2 lỗi.

A. 0,9. **B.** 0,7. **C.** 0,6. **D.** 0,4.

§6 BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Định nghĩa: Đại lượng X được gọi là một ***biến ngẫu nhiên rời rạc*** nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó, và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

2. PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Khi đó bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

trong đó $P(X = x_k) = p_k$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Lưu ý: Trong bảng trên luôn có $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

3. KÌ VỌNG

Định nghĩa: Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. ***Kì vọng*** của X, kí hiệu là E(X) là một số được tính theo công thức:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k,$$

trong đó $p_k = P(X = x_k)$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Ý nghĩa: E(X) là một con số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X.

4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Định nghĩa: Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

a. ***Phương sai*** của X, kí hiệu là V(X) là một số được tính theo công thức:

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k,$$

trong đó $p_k = P(X = x_K)$ với $k = 1, 2, ..., n$ và $\mu = E(X)$.

b. Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là σ(X) được gọi là ***độ lệch chuẩn*** của X. Ta có:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Ý nghĩa: V(X) là một số không âm, nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán này càng lớn.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 66: Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có ba con. Gọi X là số con trai trong gia đình đó. Giả sử xác suất sinh con trai trong gia đình đó là 0,5. Hãy tính:

a. $P(X = 0)$.

A. 0.125. **B.** 0,15. **C.** 0,12. **D.** 0,22.

b. $P(X = 1)$.

A. 0,37. **B.** 0,375. **C.** 0,38. **D.** 0,28.

c. $P(X = 2)$.

A. 0,37. **B.** 0,375. **C.** 0,38. **D.** 0,28.

d. $P(X = 3)$.

A. 0.125. **B.** 0,15. **C.** 0,12. **D.** 0,22.

Từ đó, lập bảng phân bố xác suất của X.

e. Tính $E(X)$.

A. 1,5. **B.** 1,6. **C.** 1,7. **D.** 1,8.

f. Tính $V(X)$.

A. 0,65. **B.** 0,75. **C.** 0,85. **D.** 0,95.

g. Tính $\sigma(X)$.

A. $\sqrt{0,65}$. **B.** $\sqrt{0,75}$. **C.** $\sqrt{0,85}$. **D.** $\sqrt{0,95}$.

Bài 67: Số ca cấp cứu ở một bệnh viện vào tối thứ 7 là một biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Biết rằng, nếu có hơn 2 ca cấp cứu thì phải tăng cường thêm bác sĩ trực.

a. Tính xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ 7.

A. 0,35. **B.** 0,45. **C.** 0,55. **D.** 0,65.

b. Tính xác suất để có ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ 7.

A. 0,95. **B.** 0,85. **C.** 0,75. **D.** 0,65.

c. Tính $E(X)$.

A. 2,15. **B.** 2,1. **C.** 2,05. **D.** 2.

d. Tính $V(X)$.

A. 1,25. **B.** 1,45. **C.** 1,65. **D.** 1,85.

e. Tính $\sigma(X)$.

A. $\sqrt{1,25}$. **B.** $\sqrt{1,45}$. **C.** $\sqrt{1,65}$. **D.** $\sqrt{1,85}$.

Bài 68: Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài trong khoảng thời gian 1 phút vào buổi trưa (từ 12 giờ đến 13 giờ) là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

a. Tính xác suất để trong khoảng thời gian từ 12 giờ 30 phút đến 12 giờ 31 phút có nhiều hơn 2 cuộc gọi.

A. 0,35. **B.** 0,4. **C.** 0,45. **D.** 0,5.

b. Tính E(X).

A. 1,9. **B.** 1,85. **C.** 1,8. **D.** 1,75.

c. Tính V(X).

A. 2,63. **B.** 2,73. **C.** 2,83. **D.** 2,93.

d. Tính $\sigma(X)$.

A. $\sqrt{2,63}$. **B.** $\sqrt{2,73}$. **C.** $\sqrt{2,83}$. **D.** $\sqrt{2,93}$.

Bài 69: Chọn ngẫu nhiên 3 đứa trẻ từ một nhóm trẻ gồm 6 trai và 4 gái. Gọi X là số bé gái trong số 3 đứa trẻ được chọn. Hãy tính:

a. $P(X = 0)$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

b. $P(X = 1)$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

c. $P(X = 2)$.

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

d. $P(X = 3)$.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Từ đó, lập bảng phân bố xác suất của X.

Bài 70: Số đơn đặt hàng đến trong một ngày ở một công ty vận tải là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

a. Tính xác suất để số đơn đặt hàng thuộc đoạn [1 ; 4].

A. 0,8. **B.** 0,75. **C.** 0,7. **D.** 0,65.

b. Tính xác suất để có ít nhất 4 đơn đặt hàng đến công ty đó trong một ngày.

A. 0,1. **B.** 0,2. **C.** 0,3. **D.** 0,4.

c. Tính số đơn đặt hàng trung bình đến công ty đó trong một ngày.

A. 2. **B.** 2,1. **C.** 2,2. **D.** 2,5.

Bài 71: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{3}{14}$

Tính chính xác đến hàng phần nghìn các giá trị:

a. E(X).

A. 1,875. **B.** 1,775. **C.** 1,675. **D.** 1,575.

b. V(X).

A. 0,509. **B.** 0,609. **C.** 0,709. **D.** 0,809.

c. $\sigma(X)$.

A. $\sqrt{0,509}$. **B.** $\sqrt{0,609}$. **C.** $\sqrt{0,709}$. **D.** $\sqrt{0,809}$.

Bài 72: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{28}$

Tính chính xác đến hàng phần nghìn các giá trị:

a. E(X).

A. 18,375. **B.** 16,375. **C.** 14,375. **D.** 12,375.

b. V(X).

A. 5,284. **B.** 5,384. **C.** 5,484. **D.** 5,584.

c. $\sigma(X)$.

A. $\sqrt{5,284}$. **B.** $\sqrt{5,384}$. **C.** $\sqrt{5,484}$. **D.** $\sqrt{5,584}$.

Bài 73: Hai xạ thủ độc lập với nhau cùng bắn vào một tấm bia. Mỗi người bắn được một viên. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ nhất là 0,7; của xạ thủ thứ hai là 0,8. Gọi X là số viên đạn trúng bia. Tính kì vọng của X.

A. 1,75. **B.** 1,5. **C.** 1,54. **D.** 1,6.

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta gọi:

- Nếu chọn áo cỡ 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn áo cỡ 40 thì sẽ có 4 cách.

Như vậy, ta có: $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Bài 2: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy, số cách chọn bằng: $3.4. = 12$ cách.

Bài 3: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Một số gồm 2 chữ số có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2}$, với $\alpha_i \in A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $\alpha_1 \neq 0$.

Trong đó:
- α_1 được chọn từ tập $A\backslash\{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có: $4 \times 5 = 20$ số.

Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Để chọn một trong số $280 + 325 = 605$ em đi dự dạ hội của học sinh thành phố ta có ngay 605 cách chọn.

b. Ta thấy:
- Có 280 cách chọn một em nam.
- Có 325 cách chọn một em nữ.

Vậy, có tất cả: $280 \times 325 = 91000$ cách chọn một nam và một nữ đi dự trại hè.

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C.

a. Để đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần ta thấy:

- Từ A → B có 4 cách.
- Từ B → C có 2 cách.
- Từ C → D có 3 cách.

Vậy, số cách đi bằng: $4.2.3 = 24$ cách.

b. Từ kết quả câu a), ta thấy:

- Từ A → D có 24 cách.
- Từ D → A có 24 cách.

Vậy, số cách đi bằng: $24.24 = 576$ cách.

Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

Lời giải tự luận: Một số gồm 4 chữ số hình thành từ tập $A = \{1, 5, 6, 7\}$ có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, với $\alpha_i \in A$.

a. Số có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau thì:

- α_1 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_4 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có: $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ số.

b. Số có 4 chữ số khác nhau thì :

- α_1 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
- α_4 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.

Như vậy, ta có: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ số.

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D; c). C.

a. Ta thấy ngay có thể lập được 4 số có một chữ số.

b. Một số gồm 2 chữ số có dạng: $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, với $\alpha_i \in A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Trong đó: ▪ α_1 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
▪ α_2 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có: $4 \times 4 = 16$ số.

c. Một số gồm 2 chữ số có dạng: $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, với $\alpha_i \in A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Trong đó: ▪ α_1 được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
▪ α_2 được chọn từ tập $A \backslash \{\alpha_1\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có: $4 \times 3 = 12$ số.

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Một số gồm 3 chữ số có dạng: $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, với $\alpha_i \in A$.

Trong đó: ▪ α_1 được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
▪ α_2 được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có: $6 \times 6 = 36$ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Vì không có hai đội nào có điểm trùng nhau nên mỗi một thứ tự giữa các đội tương ứng với một hoán vị của 5 phần tử, do đó ta có:

$5! = 120$ khả năng.

Bài 10: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Mỗi tứ diện tương ứng với một tổ hợp chập 4 của 9 phần tử, do đó ta được:

$C_9^4 = 126$ tứ diện.

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). D.

a. Số cách chọn 4 thành viên vào Uỷ ban thường trực tương ứng với một tổ hợp chập 4 của 25 phần tử, do đó ta được: $C_{25}^{4} = 126500$ cách.

b. Số cách chọn Chủ tịch, Phó chủ tịch và Thủ quỹ là: $25.24.23 = 13800$ cách.

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Vì không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc nên mỗi một kết quả của cuộc thi tương ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử, do đó ta có: $A_8^3 = 336$ kết quả.

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

a. Mỗi đoạn thẳng được xây dựng từ hai điểm (không kể thứ tự, tức là hai đoạn AB và BA là giống nhau) nên nó ứng với một tổ hợp chập 2 của n phần tử, do đó ta có: $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng.

b. Ta biết rằng vectơ khác vectơ $\vec{0}$ khi điểm đầu và điểm cuối không trùng nhau, do đó vectơ được xây dựng từ hai điểm (có kể thứ tự vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là khác nhau) nên nó ứng với một chỉ hợp chập 2 của n phần tử, do đó ta có:

$$A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) \text{ vectơ.}$$

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì mỗi cách chọn ứng với một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử, do đó ta có:

$C_7^3 = 35$ cách chọn.

b. Nếu có sự phân biệt về chức vụ của 3 người (Bí thư, Phó bí thư, Uỷ viên thường vụ) trong ban thường vụ thì mỗi cách chọn ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử, do đó ta có: $A_7^3 = 210$ cách chọn.

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Vì mỗi câu có 4 phương án nên để làm một bài thi có 10 câu hỏi sẽ có số phương án bằng: $4^{10} = 1048576$.

Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ tập $A = \{0, 1, ..., 9\}$ có dạng:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_i \in A$, $i = \overline{1,6}$ và $a_1 \neq 0$.

Để số tìm được phải chia hết cho 5, ta thấy:

- $a_6 \in \{0, 5\}$ – có 2 cách chọn.
- $a_1 \neq 0$ – có 9 cách chọn.
- Tiếp theo, với các vị trí a_2, a_3, a_4, a_5 đều có 10 cách chọn.

Như vậy, ta được: $2 \times 9 \times 10^4 = 180000$ số.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì mỗi kết quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 15 phần tử, do đó ta có:

$C_{15}^4 = 1365$ kết quả.

b. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 15 phần tử, do đó ta có:

$A_{15}^{3} = 2730$ kết quả.

Bài 18: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C; c). D.

Mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 100 phần tử, do đó ta có:

$A_{100}^{4} = 94109400$ kết quả.

b. Vì người giữ vé số 47 được giải nhất nên mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có: $A_{99}^{3} = 941094$ kết quả.

c. Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 sẽ có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có A_{99}^{3}.

Vậy, số kết quả bằng: $4 \times A_{99}^{3} = 4 \times 941094 = 3764376$ kết quả.

Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Nhận xét rằng:

- Nếu trong nhóm chọn ra có một em nữ thì:
  - Có 2 cách chọn học sinh nữ.
  - Bốn em nam được chọn từ 8 em nên có C_8^4 cách.

  Do đó, trường hợp này số cách chọn bằng: $2 \times C_8^4$ cách.
- Nếu trong nhóm chọn ra có hai em nữ thì:
  - Có 1 cách chọn số học sinh nữ.
  - Ba em nam được chọn từ 8 em nên có C_8^3 cách.

  Do đó, trường hợp này số cách chọn bằng: $1 \times C_8^3$ cách.

Vậy, số cách chọn bằng: $2 \times C_8^4 + 1 \times C_8^3 = 196$ cách.

Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Nhận xét rằng:

- Nếu trong nhóm chọn ra có một em nữ thì:
  - Có 3 cách chọn học sinh nữ.
  - Bốn em nam được chọn từ 7 em nên có C_7^4 cách.

  Do đó, trường hợp này số cách chọn bằng: $3 \times C_7^4$ cách.
- Nếu trong nhóm chọn ra không có nữ thì năm em nam được chọn từ 7 em nên có C_7^5 cách.

  Do đó, trường hợp này số cách chọn bằng: C_7^5 cách.

Vậy, số cách chọn bằng: $3 \times C_7^4 + C_7^5 = 126$ cách.

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Một số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$.

Trong đó:

- α_1 được chọn từ tập A\{0} (có 3 phần tử) nên có 6 cách chọn.
- α_3 được chọn từ tập A_1 = {0, 2, 4, 6} nên có 4 cách chọn.
- α_2 được chọn từ tập A (có 7 phần tử) nên có 7 cách chọn.

Khi đó, số các số chẵn gồm 3 chữ số hình thành từ tập A bằng: 6.4.7 = 168 số.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Một số gồm 3 chữ số hình thành từ tập A = {1, 2, 3, 4, 5} có dạng:

$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, với $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,3}$.

Xét hai trường hợp:

Trong đó:

- α_3 được chọn từ tập A{2, 4} (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
- Bộ (α_1, α_2) được chọn từ tập A\{α_3} (có 4 phần tử) nên có A_4^2 cách.

Vậy, số các số chẵn gồm 3 chữ số hình thành từ tập A bằng:

$2 + A_4^2 = 24$ số.

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). B; c). C.

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). C.

Bài 28: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). B.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). B.

Bài 30: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có khai triển:

$$(3x + 2y)^{17} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k (3x)^{17-k}.(2y)^k = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k 3^{17-k}.2^k.x^{17-k}y^k$$

từ đó, suy ra hệ số của x^8y^9 trong khai triển là $C_{17}^8 3^8.2^9$.

Bài 32: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$(2x - 3y)^{200} = \sum_{k=0}^{200} C_{200}^k (2x)^{200-k}.(-3y)^k = \sum_{k=0}^{200} C_{200}^k 2^{200-k}.(-3)^k x^{200-k}.y^k$$

Do đó, hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển bằng:

$$C_{200}^{99} 2^{101}.(-3)^{99} = -C_{200}^{99} 2^{101}.3^{99}.$$

Bài 33: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta có ngay, hệ số của x^5y^8 trong khai triển là $C_{13}^8 = 1287$.

Bài 34: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Ta có ngay, hệ số của x^7 trong khai triển là $C_{11}^7 = 330$.

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có: $(2-x)^{19} = \sum\limits_{k=0}^{19} C_{19}^k 2^{19-k}.(-x)^k = \sum\limits_{k=0}^{19} C_{19}^k 2^{19-k}.(-1)^k.x^k$

Do đó, hệ số của x^9 trong khai triển bằng:

$$C_{19}^9 2^{10}.(-1)^9 = -C_{19}^9 2^{10} = -94595072.$$

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta có: $(3-2x)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k 3^{15-k}.(-2x)^k = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k 3^{15-k}(-2)^k.x^k$

Do đó, hệ số của x^7 trong khai triển bằng: $C_{15}^7 3^8(-2)^7 = -C_{15}^7 3^8 2^7$.

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta có: $(x^3+xy)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k (x^3)^{15-k}.(xy)^k = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{45-2k}.y^k$.

Do đó, hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển bằng $C_{15}^{10} = 3003$.

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Ta có: $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}.\left(-\dfrac{1}{4}\right)^k$, do đó

hệ số của x^{n-2} trong khai triển là: $C_n^2.\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = 31 \Leftrightarrow C_n^2 = 31.16 \Leftrightarrow n = 32$.

Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta có: $(1-3x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-3x)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-3)^k.x^k$.

Do đó, hệ số của x^2 trong khai triển bằng: $C_n^2.(-3)^2 = 90 \Leftrightarrow n = 5$.

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). A.

Bài 43: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 44: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 45: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 46: *Đáp số trắc nghiệm* c). A; d). B.

a. Không gian mẫu là: $\Omega = \{1, 2, ..., 50\}$ – có 50 phần tử.

b. Biến cố A: " Số được chọn là số nguyên tố " được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ – có 15 phần tử.

c. Từ kết quả câu a) và câu b), ta có: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{15}{50} = 0,3$.

d. Biến cố B: " Số được chọn nhỏ hơn " được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_B = \{1, 2, 3\}$ – có 3 phần tử.

Suy ra: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{3}{50} = 0,06$.

Bài 47: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). D.

Lời giải tự luận: Ta có không gian mẫu là:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – có 8 phần tử.

a. Biến cố A: " Số được chọn là số nguyên tố " được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7\}$ – có 4 phần tử.

Khi đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$

b. Biến cố B: "Số được chọn chia hết cho 3" được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_B = \{3, 6\}$ – có 2 phần tử.

Khi đó: $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0{,}25.$

Bài 48: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

Lời giải tự luận: Ta có không gian mẫu có 30 phần tử.

a. Khi đó xác suất của biến cố A: "Hường được chọn" được cho là:

$P(A) = \frac{1}{30}.$

b. Khi đó xác suất của biến cố B: "Hường không được chọn" được cho là:

$P(B) = \frac{29}{30}.$

c. Vì có 11 bạn có thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường nên xác suất của biến cố C: " Một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường được chọn " được cho là: $P(C) = \frac{11}{30}.$

Bài 49: *Đáp số trắc nghiệm* b). B; c). C; d). D.

a. Ta có không gian mẫu là: $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), ...,$
$(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)\}$

có 36 phần tử.

b. Biến cố A: " Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7 " được mô tả bởi tập hợp:

$$\begin{aligned}\Omega_A = \{&(1; 6), (1; 5), (1; 4), (1; 3), (1; 2), (1; 1),\\ &(2; 5), (2; 4), (2; 3), (2; 2), (2; 1),\\ &(3; 4), (3; 3), (3; 2), (3; 1)\\ &(4; 3), (4; 2), (4; 1),\\ &(5; 2), (5; 1),\\ &(6; 1)\}\end{aligned}$$

có 21 phần tử.

Khi đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$

c. Biến cố B: "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm" được mô tả bởi tập hợp: $\Omega_B = \{(1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6), (6; 6)$

$(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)\}$

có 11 phần tử.

Khi đó: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{11}{36}$.

d. Biến cố C: "Có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm" được mô tả bởi tập hợp: $\Omega_C = \{(1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6),$

$(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)\}$

có 10 phần tử.

Khi đó: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

Bài 50: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

- Không gian mẫu là Ω có số phần tử là C_{20}^5 (chọn 5 người từ 20 người).
- Biến cố A: "5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10" được mô tả bởi tập hợp Ω_A có số phần tử là C_{10}^5 (chọn 5 người từ 10 người có số thứ tự từ 1 đến 10).

Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{10}^5}{C_{20}^5} \approx 0,016$.

Bài 51: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). D.

Lời giải tự luận: Ta có không gian mẫu là Ω có số phần tử là C_{199}^5 (chọn 5 học sinh từ 199 học sinh ban đầu).

a. Biến cố A: "5 học sinh có số thứ tự từ 001 đến 099" được mô tả bởi tập hợp Ω_A có số phần tử là C_{99}^5 (chọn 5 học sinh từ 99 học sinh có số thứ tự từ 001 đến 099).

Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{99}^5}{C_{199}^5} \approx 0,029$.

b. Biến cố B: "5 học sinh có số thứ tự từ 150 đến 199" được mô tả bởi tập hợp Ω_B có số phần tử là C_{50}^5 (chọn 5 học sinh từ 50 học sinh có số thứ tự từ 150 đến 199).

Khi đó: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{50}^5}{C_{199}^5} \approx 0,0009$.

Bài 52: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Không gian mẫu là Ω có số phần tử là $C_{10}^4 = 210$ (chọn 4 quả cầu từ có $4 + 6 = 10$ quả cầu).

Biến cố A: "4 quả cầu quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh" được mô tả bởi tập hợp Ω_A, với: $\Omega_A = Đ_1 + Đ_2 + Đ_3$, trong đó:

- $Đ_1$ là số bộ 4 quả cầu có 1 quả cầu đỏ, có $4.C_6^3$ phần tử.
- $Đ_2$ là số bộ 4 quả cầu có 2 quả cầu đỏ, có $C_4^2.C_6^2$ phần tử.
- $Đ_2$ là số bộ 4 quả cầu có 3 quả cầu đỏ, có $C_4^3.6$ phần tử.

Suy ra, số phần tử của tập Ω_A là: $4.C_6^3 + C_4^2.C_6^2 + C_4^3.6 = 194$

Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{194}{210} = \dfrac{97}{105}$.

Bài 53: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Không gian mẫu là Ω có số phần tử là $7^3 = 343$.

Biến cố A: "Trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau" được mô tả bởi tập hợp Ω_A có số phần tử là $7.6.5 = 210$.

Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{210}{342} = \dfrac{30}{49}$.

Bài 54: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Không gian mẫu là Ω có số phần tử là $6.6 = 36$.

Biến cố A: "Số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2" được mô tả bởi tập hợp:

$\Omega_A = \{(1; 3), (2; 4), (3; 5), (3; 1), (4; 6), (4; 2), (5; 3), (6; 4)\}$ – có 8 phần tử.

Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Bài 55: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Những số tự nhiên chia hết cho 3 luôn có dạng 3k, suy ra từ 1 đến 999 có tất cả $\left\lfloor \dfrac{999}{3} \right\rfloor = 333$ số chia hết cho 3.

Từ đó, xác suất để số đó chia hết cho 3 là $\dfrac{333}{999} = \dfrac{1}{3}$.

b. Những số tự nhiên chia hết cho 5 luôn có dạng 5k, suy ra từ 1 đến 999 có tất cả $\left\lfloor \dfrac{999}{5} \right\rfloor = 199$ số chia hết cho 5.

Từ đó, xác suất để số đó chia hết cho 5 là $\dfrac{199}{999}$.

Bài 56: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D; c). B.

Lời giải tự luận: Gọi:

- A là biến cố "Đồng xu thứ nhất hiện mặt sấp",
- B là biến cố "Đồng xu thứ hai hiện mặt sấp",
- C là biến cố "Đồng xu thứ ba hiện mặt sấp",

ta thấy ngay A, B, C là ba biến cố độc lập với nhau.

a. Gọi D là biến cố "Cả ba đồng xu đều sấp", ta có ngay:

$$D = ABC \Rightarrow P(D) = P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

b. Gọi E là biến cố "Có ít nhất một đồng xu sấp", ta thấy ngay E là biến cố đối của biến cố "Cả ba đồng xu đều ngửa" (là biến cố $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$). Suy ra:

$$P(E) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

c. Gọi F là biến cố "Có đúng một đồng xu sấp", ta thấy ngay:

$$F = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$\Rightarrow P(F) = P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$= P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(C)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Bài 57: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Lời giải tự luận: Gọi:

- A là biến cố "Người đó bắn trúng hồng tâm lần thứ nhất",
- B là biến cố "Người đó bắn trúng hồng tâm lần thứ hai",
- C là biến cố "Người đó bắn trúng hồng tâm lần thứ ba",

ta thấy ngay A, B, C là ba biến cố độc lập với nhau.

a. Gọi D là biến cố "Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần", ta có ngay:

$$D = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$$

$$\Rightarrow P(D) = P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$= P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(C)$$

$$= 0{,}2.(1-0{,}2).(1-0{,}2) + (1-0{,}2).0{,}2.(1-0{,}2) + (1-0{,}2).(1-0{,}2).\,0{,}2 = 0{,}384.$$

b. Gọi E là biến cố "Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần", ta thấy ngay E là biến cố đối của biến cố "Cả ba đều bắn không trúng hồng tâm" (là biến cố $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$). Suy ra: $P(E) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})$

$$= 1 - (1-0{,}2).(1-0{,}2)(1-0{,}2) = 0{,}488.$$

Bài 58: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

Lời giải tự luận: Gọi:

- A là biến cố "Khi gieo đồng xu A được mặt ngửa", ta có $P(A) = \frac{1}{2}$
- B là biến cố "Khi gieo đồng xu B được mặt ngửa", ta có:

$$1 = P(B) + P(\overline{B}) = P(B) + 3P(B) = 4P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

ta thấy ngay A, B là hai biến cố độc lập với nhau.

a. Gọi C là biến cố "Khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa", ta có ngay: $C = AB \Rightarrow P(C) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

b. Gọi D là biến cố "Khi gieo hai đồng xu hai lần thì cả hai đồng xu đều ngửa", ta có ngay: $D = CC \Rightarrow P(D) = P(C).P(C) = \frac{1}{8}.\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

Bài 59: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Nhận thấy:

- Không gian mẫu là Ω có số phần tử là C_{52}^5.
- Số cách chọn 5 quân bài có không có quân át nào là C_{48}^5.

Từ đó, ta được xác suất để trong 5 quân bài này có ít nhất một quân át là $-\dfrac{C_{48}^5}{C_{52}^5}$.

Bài 60: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Không gian mẫu là Ω có số phần tử là 5.5 = 25.

Biến cố A: "Tổng số các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 3" được mô tả bởi tập hợp:

$$\begin{aligned}\Omega_A = \{&(1;2), (1;3), (1;4), (1;5)\\ &(2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5)\\ &(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5)\\ &(4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5)\\ &(5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5)\}\end{aligned}$$

- có 24 phần tử.

Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{24}{25}$.

Cách 2: Không gian mẫu là Ω có số phần tử là 5.5 = 25.

Biến cố A: "Tổng số các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra nhỏ hơn 3" được mô tả bởi tập hợp $\Omega_A = \{(1;1)\}$ – có 1 phần tử. Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{25}$.

Biến cố B: "Tổng số các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 3" là biến cố đối của biến cố A, do đó: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$.

Bài 61: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Không gian mẫu là Ω có số phần tử là 5.5.5 = 125.

Biến cố A: "Tổng số các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra nhỏ hơn 4" được mô tả bởi tập hợp $\Omega_A = \{(1;1;1)\}$ – có 1 phần tử. Khi đó: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{125}$.

Biến cố B: "Tổng số các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4" là biến cố đối của biến cố A, do đó: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{125} = \dfrac{124}{125}$.

b. Biến cố C: "Tổng số các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 6" được mô tả bởi tập hợp:

$$\begin{aligned}\Omega_C = \{&(1;1;4), (1;2;3), (1;3;2), (1;4;1),\\ &(2;1;3), (2;2;2), (2;3;1),\\ &(3;1;2), (3;2;1), (4;1;1)\}\end{aligned}$$

– có 10 phần tử.

Khi đó: $P(C) = \dfrac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \dfrac{10}{125}$.

Bài 62: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Gọi:

- A là biến cố "Học sinh đó trả lời không đúng một câu", ta có $P(A) = \frac{4}{5}$
- B là biến cố "Học sinh đó trả lời không đúng một câu", ta có:

$$P(B) = [P(A)]^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}.$$

Bài 63: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Gọi:

- A là biến cố "Thẻ rút ra từ hòm thứ nhất có số khác 12", ta có $P(A) = \frac{11}{12}$
- B là biến cố "Thẻ rút ra từ hòm thứ hai có số khác 12", ta có $P(B) = \frac{11}{12}$
- C là biến cố "Hai thẻ rút ra có không có thẻ nào đánh số 12", ta có:

$$P(C) = P(A).P(B) = \frac{11}{12}.\frac{11}{12} = \frac{121}{144}.$$

Khi đó, nếu gọi D là biến cố "Hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12", ta thấy ngay D là biến cố đối của biến cố C. Do đó:

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}.$$

Bài 64: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Gọi n là số trận An phải chơi để thoả mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó, gọi:

- A là biến cố "An thua cả n trận", ta có: $P(A) = (1 - 0,4)^n = (0,6)^n$.
- B là biến cố "An thắng ít nhất một trận", ta thấy ngay B là biến cố đối của biến cố A. Do đó: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - (0,6)^n$.

Từ giả thiết, ta được điều kiện: $1 - (0,6)^n > 0,95$

$\Leftrightarrow (0,6)^n < 0,05 \Rightarrow n > 5,86 \Rightarrow n_{Min} = 6$. Vậy, An phải chơi tối thiểu 6 trận.

Bài 65: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Xác suất để trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi là:

$$P(X \le 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= 0,01 + 0,09 + 0,3 + 0,3 + 0,2 = 0,9.$$

b. Xác suất để trên trang sách có ít nhất 2 lỗi:

$$P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0,3 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,9.$$

Bài 66: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). B; d). A; e). A; f). B; g). B.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

a. $P(X = 3)$ là xác suất chọn gia đình có 3 con trai: $P(X = 3) = (0,5)^3 = 0,125$.

b. $P(X = 2)$ là xác suất chọn gia đình có 2 con trai:

$$P(X = 2) = 0,5 - 0,125 = 0,375.$$

c. $P(X = 1)$ là xác suất chọn 1 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh.

$$P(X = 1) = 0,5 - 0,125 = 0,375.$$

d. $P(X = 0)$ là xác suất chọn gia đình không có con **trai**:

$$P(X = 0) = (1 - 0,5)^3 = 0,125.$$

Từ đó, ta có bảng phân bố xác suất:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

e. Ta có: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 1,5.$

f. Ta có: $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k = \sum_{k=1}^{n} [x_k - E(X)]^2.p_k = 0,75.$

g. Ta có: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,75}.$

Bài 67: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D; e). D.

a. Xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ 7 là:

$$P = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35.$$

b. Xác suất để có ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ 7 là:

$$P = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,85.$$

Chú ý: Cũng có thể lập luận theo cách: $P = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,15 = 0,85.$

c. Ta có: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 2,05.$

d. Ta có: $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k = \sum_{k=1}^{n} [x_k - E(X)]^2.p_k = 1,85.$

e. Ta có: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,85}.$

Bài 68: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). C.

a. Ta có ngay: $P = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,15 + 0,1 + 0,1 = 0,35.$

b. Ta có: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 1,85.$

c. Ta có: $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k = \sum_{k=1}^{n} [x_k - E(X)]^2.p_k \approx 2,83.$

d. Ta có: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,83}.$

Bài 69: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). A; d). A.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

- $P(X = 0)$ là xác suất chọn không có bé gái (có 3 bé trai).

  Số cách chọn 3 bé trai là $C_6^3 = 20$, suy ra: $P(X = 0) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$

- $P(X = 1)$ là xác suất chọn 1 bé gái.

  Số cách chọn là $C_6^2 C_4^1 = 15.4 = 60$, suy ra: $P(X = 1) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$

- $P(X = 2)$ là xác suất chọn 2 bé gái.

Số cách chọn là $C_6^1 C_4^2 = 6.6 = 36$, suy ra: $P(X = 2) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

- . $P(X = 3)$ là xác suất chọn 3 bé gái.

Số cách chọn là $C_4^3 = 4$, suy ra: $P(X = 3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

Từ đó, ta có bảng phân bố xác suất:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Bài 70: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Xác suất để số đơn đặt hàng thuộc đoạn [1; 4] là:

$$P(X \in [1;4]) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= 0,2 + 0,4 + 0,1 + 0,1 = 0,8.$$

b. Xác suất để có ít nhất 4 đơn đặt hàng đến công ty đó trong một ngày là:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

c. Số đơn đặt hàng trung bình đến công ty đó trong một ngày chính là E(X), ta có: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 2,2$.

Bài 71: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). B.

Ta lần lượt có: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 1,875$.

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k = \sum_{k=1}^{n} [x_k - E(X)]^2.p_k \approx 0,609.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,78$$

Bài 72: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). C; c). C.

Ta lần lượt có: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k.p_k = 18,375$.

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.p_k = \sum_{k=1}^{n} [x_k - E(X)]^2.p_k \approx 5,484.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,342.$$

Bài 73: *Đáp số trắc nghiệm* B.

CHƯƠNG III.

DÃY SỐ CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Việc sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh f(n) có tính chất K với $n \in \mathbf{N}$ ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng tỏ với $n = 1$ thì $f(1)$ thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng $f(k)$ thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng $f(k + 1)$ cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Chứng minh rằng với $n \in N^*$ ta có các đẳng thức:

a. $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$.

b. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$.

c. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in N^*$ ta có :

a. $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

b. $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

c. $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$, ta có :

a. $13^n - 1$ chia hết cho 6.

b. $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.

Bài 4: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có các bất đẳng thức:

a. $3^n > 3n + 1$.

b. $2^{n+1} > 2n + 3$.

§2 DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1*: Một hàm số u xác định trên tập hợp* $\mathbf{N}^*$ *các số nguyên dương được gọi là một* ***dãy số vô hạn*** *(hay còn gọi tắt là* ***dãy số****).*

Kí hiệu (u_n) hay ở dạng khai triển là $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

2. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách:

Cách 1: *Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát* u_n.

Cách 2: *Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi* (hay còn nói *cho dãy số bằng quy nạp*), tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu).
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Cách 3: *Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.*

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

Định nghĩa 2*:*

a. *Dãy số* (u_n) *được gọi là dãy số tăng nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n < u_{n+1}$.

b. *Dãy số* (u_n) *được gọi là dãy số giảm nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n > u_{n+1}$.

Vậy, ta thấy:

- Với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < \ldots$.
- Với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

Định nghĩa 3*:*

a. *Dãy số* (u_n) *được gọi là bị chặn trên nếu :* $\exists M \in \mathbf{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

b. *Dãy số* (u_n) *được gọi là bị chặn dưới nếu :* $\exists m \in \mathbf{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

c. *Dãy số* (u_n) *được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:* $\exists m, M \in \mathbf{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 5: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Hãy chọn phương án đúng:

a. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. $3^n + 1$. **B.** $3^n + 3$. **C.** $3^n.3$. **D.** $3(n+1)$.

b. Số hạng u_{2n} bằng:

A. 2.3^n. **B.** 9^n. **C.** $3^n + 3$. **D.** $6n$.

c. Số hạng u_{n-1} bằng:

A. $3^n - 1$. **B.** $\frac{1}{3}.3^n$. **C.** $3^n - 3$. **D.** $3n - 1$.

d. Số hạng u_{2n-1} bằng:

A. $3^2.3^n - 1$. **B.** $3^n.3^{n-1}$. **C.** $3^{2n} - 1$. **D.** 3^{2n-1}.

Bài 6: Hãy cho biết dãy số (u_n) nào dưới đây là dãy số tăng, nếu biết công thức số hạng tổng quát u_n của nó là :

A. $(-1)^{n+1}.\sin\frac{\pi}{4}$ B. $(-1)^{2n}.(5^n+1)$ C. $\frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$ D. $\frac{n}{n^2+1}$

Bài 7: Cho dãy số (u_n) với: $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+36}}$.

a. Viết 5 số hạng đầu của dãy.

A. $0; \frac{2}{\sqrt{45}}; \frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{6}{\sqrt{85}}; \frac{8}{\sqrt{117}}$.

C. $-\frac{1}{6}; \frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; -\frac{5}{\sqrt{72}}; \frac{7}{10}$.

B. $0; \frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{2}{\sqrt{45}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{4}{\sqrt{61}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{5}{\sqrt{72}}; \frac{7}{10}; \frac{9}{\sqrt{136}}$

b. Tìm xem $\frac{7}{10}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_5. **B.** u_7. **C.** u_8. **D.** u_{10}.

Bài 8: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n+1}$.

a. Tìm u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}.

A. 1; 1; 1; 1.

C. $\frac{4}{5}; 1; 1; \frac{n}{n+1}$.

B. $\frac{4}{5}; \frac{11}{13}; \frac{2n-1}{2n+1}; \frac{n}{n+1}$.

D. 9; 12; 2n; 2n + 1.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_{20}. **B.** u_{2n}. **C.** u_{2n+1}. **D.** u_1.

c. Tìm xem 1 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

A. u_3. **B.** u_{101}. **C.** u_{2007}. **D.** u_{2n}.

Bài 9: Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức :

a. $u_n = \frac{n}{2^n-1}$.

A. $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{15}, \frac{5}{31}$.

C. $1, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{5}{31}$.

B. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{5}{31}, \frac{5}{29}$.

D. $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{31}, \frac{4}{15}$.

b. $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$.

A. $\frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \frac{3}{5}, \frac{15}{31}, \frac{31}{33}$.

C. $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{31}{33}, \frac{15}{31}$.

B. $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{15}{31}, \frac{31}{33}$.

D. $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{15}{31}, \frac{7}{9}, \frac{31}{33}$.

c. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

A. $2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{64}{27}, \dfrac{65}{56}, \dfrac{7776}{3125}$. **C.** $2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{64}{27}, \dfrac{625}{256}, \dfrac{7776}{3125}$.

B. $2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{64}{27}, \dfrac{62}{25}, \dfrac{7776}{3125}$. **D.** $2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{64}{27}, \dfrac{625}{256}, \dfrac{777}{312}$.

d. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

A. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{15}{\sqrt{26}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}, \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

B. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}, \dfrac{5}{\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{4}{\sqrt{17}}, \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

Bài 10: Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ (với $n \geq 1$).

a. Viết năm số hạng đầu của dãy.

A. 2, 3, 5, 9, 17. **C.** 3, 5, 9, 17, 19.

B. 2, 5, 9, 17, 19. **D.** 3, 9, 15, 17, 19.

b. Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Bài 11: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

a. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n).

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

b. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n).

A. Chặn trên. **B.** Chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

Bài 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$.

a. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n).

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

b. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n).

A. Chặn trên. **B.** Chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

Bài 13: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

a. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n).

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

b. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n).

A. Chặn trên. **B.** Chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

Bài 14: Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết :

a. $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$.

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

b. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

c. $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$.

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

d. $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$.

A. Tăng. **B.** Giảm. **C.** Không tăng, không giảm.

Bài 15: Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn ?

a. $u_n = 2n^2 - 1$.

A. Bị chặn trên. **B.** Bị chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

b. $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$.

A. Bị chặn trên. **B.** Bị chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

c. $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$.

A. Bị chặn trên. **B.** Bị chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

d. $u_n = \sin n + \cos n$.

A. Bị chặn trên. **B.** Bị chặn dưới. **C.** Bị chặn. **D.** Khác.

Bài 16: Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Tính S_1, S_2, S_3.

A. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}, \frac{6}{7}, \frac{11}{12}$.

b. Lựa chọn công thức tính tổng S_n theo n.

A. $\frac{n}{n+1}$. **B.** $\frac{2n-1}{2n}$. **C.** $\frac{3n-2}{3n-1}$. **D.** $\frac{5n-4}{5n-3}$.

Bài 17: Cho dãy số (u_n), biết: $u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$.

a. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

A. −1, 1, 3, 5, 7. **C.** −1, 3, 7, 11, 15.

B. −1, 2, 5, 8, 11. **D.** −1, 4, 9, 14, 19.

b. Lựa chọn công thức tính u_n theo n.

A. $2n - 3$. **B.** $3n - 4$. **C.** $4n - 5$. **D.** $5n - 6$.

Bài 18: Dãy số (u_n) cho bởi: $u_1 = 3$; $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$, $n \geq 1$.

a. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

A. 3, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{21}$, 5. **C.** 3, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$.

B. 3, $\sqrt{12}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{21}$. **D.** 3, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$.

b. Lựa chọn công thức tính u_n theo n.

A. $\sqrt{4n+5}$ **B.** $\sqrt{3n+6}$ **C.** $\sqrt{2n+7}$ **D.** $\sqrt{n-8}$

Bài 19: Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $u_n \leq \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài 20: Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$, với $cd \neq 0$.

Chứng minh rằng $u_n = (e_1 + ne_2)r^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

§3 CẤP SỐ CỘNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Dãy số (u_n) được xác định bởi:* $\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^* \end{cases}$

(u, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng.
- u là số hạng đầu tiên.
- d là công sai.

Đặc biệt khi d = 0 thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

Định lí 1: Ba số u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng (u_n) nếu:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+2}).$$

Định lí 2: Số hạng thứ n của cấp số cộng (u_n) được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

Định lí 3: Tổng của n số hạng đầu tiên (kí hiệu là S_n) của cấp số cộng (u_n) được cho bởi công thức: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = \dfrac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 21:

a. Khi nào cấp số cộng là dãy số tăng ?

A. $d < 0$. **B.** $d = 0$. **C.** $d > 0$. **D.** Khác.

b. Khi nào cấp số cộng là dãy số giảm ?

A. $d < 0$. **B.** $d = 0$. **C.** $d > 0$. **D.** Khác.

Bài 22: Cho hai cấp số cộng có cùng các số hạng và có công sai theo thứ tự là d_1, d_2. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số cộng không ? Nếu có hãy tính công sai d.

A. Có và công sai $d = d_1 + d_2$. **C.** Có và công sai $d = d_1d_2$.

B. Có và công sai $d = d_1 - d_2$. **D.** Không.

ài 23: Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\dfrac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$.

B. $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$.

C. $u_{10}.u_{30} = u_{20}$.

D. $\dfrac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}$.

Bài 24: Cho cấp số cộng −2, x, 6, y. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $x = -6, y = -2$.

B. $x = 1, y = 7$.

C. $x = 2, y = 8$.

D. $x = 2, y = 10$.

Bài 25: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy nào là cấp số cộng ? Tính số hạng đầu và công sai của nó nếu nó là cấp số cộng.

a. $u_n = 5 - 2n$.

A. Cấp số cộng và $u_1 = 3, d = -2$.

B. Cấp số cộng và $u_1 = 3, d = 2$.

C. Cấp số cộng và $u_1 = 3, d = -1$.

D. Không.

b. $u_n = \dfrac{n}{2} - 1$.

A. Cấp số cộng và $u_1 = -\dfrac{1}{2}, d = 1$.

B. Cấp số cộng và $u_1 = -\dfrac{1}{2}, d = \dfrac{1}{2}$.

C. Cấp số cộng và $u_1 = -\dfrac{1}{2}, d = -1$.

D. Không.

c. $u_n = 3^n$.

A. Cấp số cộng và $u_1 = 3, d = 1$.

B. Cấp số cộng và $u_1 = 3, d = 2$.

C. Cấp số cộng và $u_1 = 3, d = 3$.

D. Không.

d. $u_n = \dfrac{7 - 3n}{2}$.

A. Cấp số cộng và $u_1 = 2, d = \dfrac{1}{2}$.

B. Cấp số cộng và $u_1 = 2, d = -\dfrac{1}{2}$.

C. Cấp số cộng và $u_1 = 2, d = -\dfrac{3}{2}$.

D. Không.

Bài 26: Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

a. $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$.

A. $u_1 = 16$ và $d = -3$.

B. $u_1 = 16$ và $d = -\dfrac{3}{2}$.

C. $u_1 = 6$ và $d = -3$.

D. $u_1 = 6$ và $d = -\dfrac{3}{2}$.

b. $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$.

A. $u_1 = 2$ và $d = \frac{1}{2}$.
C. $u_1 = 2$ và $d = -\frac{3}{2}$.

B. $u_1 = 3$ và $d = 2$.
D. $u_1 = 3$ và $d = -2$.

Bài 27: Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của các cấp số cộng (u_n), biết:

a. $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$.

A. $u_1 = 8$ và $d = -3$.
C. $u_1 = 11$ và $d = -2$.

B. $u_1 = 8$ và $d = 3$.
D. $u_1 = 11$ và $d = 2$.

b. $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$.

A. $u_1 = 0$ và $d = 3$ hoặc $u_1 = -12$ và $d = \frac{21}{5}$.

B. $u_1 = 1$ và $d = 2$ hoặc $u_1 = 12$ và $d = -\frac{21}{5}$.

C. $u_1 = 1$ và $d = 2$ hoặc $u_1 = -12$ và $d = \frac{21}{5}$.

D. $u_1 = 0$ và $d = 3$ hoặc $u_1 = -12$ và $d = \frac{21}{5}$.

Bài 28: Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18cm.

a. Viết công thức để tìm độ cao của một bậc tuỳ ý so với mặt sân.

A. $u_n = 0{,}5 + 0{,}18n$.
C. $u_n = 1{,}5 + 0{,}18n$.

B. $u_n = 1 + 0{,}18n$.
D. $u_n = 2 + 0{,}18n$.

b. Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

A. 4,28m. **B.** 4,78m. **C.** 5,28m. **D.** 5,78m.

Bài 29: Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ ?

A. 72. **B.** 74. **C.** 76. **D.** 78.

Bài 30: Xác định m để các phương trình sau có các nghiệm lập thành một cấp số cộng:

a. $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$.

A. $m \leq 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m = 0$. **D.** m tuỳ ý.

b. $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$.

A. $m = \frac{20}{3}$. **B.** $m = -\frac{20}{3}$. **C.** $m > 4$. **D.** $m < -4$.

§4 CẤP SỐ NHÂN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Dãy số* (u_n) *được xác định bởi:* $\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n.q, \forall n \in N^* \end{cases}$

(u, q là hai số thực khác 0 cho trước) được gọi là cấp số nhân.

- u là số hạng đầu tiên.
- q là công bội.

Đặc biệt khi q = 1 thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

1. CÁC TÍNH CHẤT

Định lí 1: Ba số u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân (u_n) nếu:

$$u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2}.$$

Định lí 2: Số hạng thứ n của cấp số nhân (u_n) được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1.q^{n-1}.$$

Định lí 3: Tổng của n số hạng đầu tiên S_n của cấp số nhân (u_n) được cho bởi công thức: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 31: Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội q. Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a. $q > 0$.

A. Âm. **B.** Dương. **C.** Đan dấu. **D.** Khác.

b. $q < 0$.

A. Âm. **B.** Dương. **C.** Đan dấu. **D.** Khác.

Bài 32: Cho hai cấp số nhân có cùng số các số hạng và có công bội theo thứ tự là q_1, q_2. Tích các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số nhân không ? Nếu có hãy tính công bội q.

A. Có và công bội $q = q_1 + q_2$. **C.** Có và công bội $q = q_1q_2$.

B. Có và công bội $q = q_1 - q_2$. **D.** Không.

Bài 33: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy nào là cấp số nhân ? Nếu là cấp số nhân hãy tính công bội q của nó.

a. $u_n = \dfrac{3}{5}.2^n$.

A. Có và công bội q = 2. **C.** Có và công bội q = 3.

B. Có và công bội q = 5. **D.** Không.

b. $u_n = \frac{5}{2^n}$.

A. Có và công bội q = 5. **C.** Có và công bội q = 2.

B. Có và công bội $q = \frac{1}{2}$. **D.** Không.

c. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

A. Có và công bội $q = \frac{1}{2}$. **C.** Có và công bội $q = -\frac{1}{2}$.

B. Có và công bội q = 2. **D.** Không.

Bài 34: Cho cấp số nhân –4, x, –9. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

A. x = 36. **B.** x = –6,5. **C.** x = 6. **D.** x = – 9.

Bài 35: Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q.

a. Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q.

A. q = 3. **B.** q = –3. **C.** q = –4. **D.** q = 4.

b. Biết $q = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1.

A. $u_1 = \frac{6}{7}$. **B.** $u_1 = \frac{9}{7}$. **C.** $u_1 = -\frac{9}{7}$. **D.** $u_1 = -\frac{6}{7}$.

c. Biết $u_1 = 3$, q = –2. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy ?

A. n = 4. **B.** n = 6. **C.** n = 7. **D.** n = 8.

Bài 36: Tìm u_1 và q của cấp số nhân (u_n), biết:

a. $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$.

A. $u_1 = 3$ và $q = \pm 1$. **C.** $u_1 = 2$ và $q = \pm 3$.

B. $u_1 = \frac{1}{3}$ và $q = \pm 3$. **D.** $u_1 = \frac{1}{2}$ và $q = \pm 2$.

b. $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.

A. $u_1 = -\frac{200}{3}$ và $q = -\frac{1}{2}$. **C.** $u_1 = \frac{200}{3}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

B. $u_1 = -\frac{200}{3}$ và $q = \frac{1}{2}$. **D.** $u_1 = \frac{200}{3}$ và $q = \frac{1}{2}$.

Bài 37: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân (u_n), biết :

a. $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $u_1 = 6$ và q = 2. **C.** $u_1 = -6$ và q = 2.

B. $u_1 = 6$ và q = 1. **D.** $u_1 = -6$ và q = 1.

b. $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$.

A. $u_1 = 12$ và $q = -2$. **C.** $u_1 = 4$ và $q = -2$.

B. $u_1 = 12$ và $q = 2$. **D.** $u_1 = 4$ và $q = 2$.

c. $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}$.

A. $u_1 = -3$ và $q = 2$. **C.** $u_1 = 1$ và $q = 2$.

B. $u_1 = -3$ và $q = -2$. **D.** $u_1 = 1$ và $q = -2$.

Bài 38: Tìm u_1 và q của cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

A. $u_1 = 1$ và $q = 2$. **C.** $u_1 = -1$ và $q = 2$.

B. $u_1 = 1$ và $q = -2$. **D.** $u_1 = -1$ và $q = -2$.

Bài 39: Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau:

a. 5 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu ?

A. 1,9 triệu. **B.** 1,8 triệu. **C.** 1,7 triệu. **D.** 1,6 triệu.

b. 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu ?

A. 2 triệu. **B.** 2,1 triệu. **C.** 2,2 triệu. **D.** 2,5 triệu.

Bài 40: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia các cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (H44 – sgk). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp như trên để được hình vuông C_3,.... . Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy các hình vuông C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ... Gọi a_n là độ dài cạnh của hình vuông C_n . Dãy số (a_n) có là một cấp số nhân không ? Nếu có hãy tìm công bội q.

A. Có và công bội $q = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** Có và công bội $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

B. Có và công bội $q = \sqrt{10}$. **D.** Không.

Bài 41: Biết rằng ba số x, y, z lập thành một cấp số nhân và ba số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

A. $q = \pm 1$. **C.** $q = \pm 2$.

B. $q = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{3}$. **D.** $q = 1$ hoặc $q = -\dfrac{1}{3}$.

Bài 42: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là 12 288m^2, tính diện tích mặt trên cùng.

A. $2m^2$. **B.** $4m^2$. **C.** $6m^2$. **D.** $8m^2$.

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

Bài 1: Kí hiệu các đẳng thức cần chứng minh là (1), (2) và (3).

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có: $2 = \dfrac{1(3.1+1)}{2} = 2$, đúng. Như vậy (1) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là: $2 + 5 + 8 + ... + (3k - 1) = \dfrac{k(3k+1)}{2}$.
- Ta sẽ đi chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$2 + 5 + 8 + ... + (3k-1) + [3(k+1) - 1] = \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2)$$

$$= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}, \text{ đpcm.}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2-1}{2}$, đúng. Như vậy (2) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (2) đúng với $n = k$, tức là: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... + \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{2^k - 1}{2^k}$.
- Ta sẽ đi chứng minh (2) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \text{ đpcm.}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi số nguyên dương n.

c. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có: $1^2 = \dfrac{(1+1)(2+1)}{6}$, đúng. Như vậy (3) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (3) đúng với $n = k$, tức là: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.
- Ta sẽ đi chứng minh (3) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \text{ đpcm.}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (3) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 2: Kí hiệu các đẳng thức cần chứng minh là (1), (2) và (3).

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có: $1 + 3 + 5 = 9 \vdots 3$. Như vậy (1) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là $k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$.
- Ta sẽ đi chứng minh (2) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3)$$

Vì $(k^3 + 3k^2 + 5k) \vdots 6$ và $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$ nên biểu thức trên chia hết cho 3.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

b. Ta lần lượt thực hiện: Với $n = 1$, ta có $4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$.

Như vậy (2) đúng với $n = 1$.

- Giả sử (2) đúng với $n = k$, tức là $(4^k + 15k - 1) \vdots 9$.
- Ta sẽ đi chứng minh (2) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k - 2)$$

Vì $4(4^k + 15k - 1) \vdots 9$ và $9(5k - 2) \vdots 9$ nên biểu thức trên chia hết cho 9.

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi số nguyên dương n.

c. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có $1^3 + 11 = 12 \vdots 6$. Như vậy (3) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (3) đúng với $n = k$, tức là $(k^3 + 11k) \vdots 6$.
- Ta sẽ đi chứng minh (3) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 + 11(k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11\\ &= (k^3 + 11k) + 3k(k + 1) + 12\end{aligned}$$

Vì $(k^3 + 11k) \vdots 6$, $3k(k + 1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$ nên biểu thức trên chia hết cho 6.

Từ các chứng minh trên suy ra (3) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 3:

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có $13 - 1 = 12 \vdots 6$. Như vậy (1) đúng với $n = 1$
- Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là $(13^k - 1) \vdots 6$.

Ta sẽ đi chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$13^{k+1} - 1 = 13^{k+1} - 13^k + 13^k - 1 = 12.\ 13^k + (13^k - 1).$$

Vì $12.\ 13^k \vdots 6$ và $(13^k - 1) \vdots 6$ nên biểu thức trên chia hết cho 6.

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 1$, ta có $3 + 15 = 18 \vdots 9$. Như vậy (2) đúng với $n = 1$.
- Giả sử (2) đúng với $n = k$, tức là $(3k^3 + 15k) \vdots 9$.
- Ta sẽ đi chứng minh (2) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$3(k + 1)^3 + 15(k + 1) = (3k^3 + 15k) + 9(k^2 + k + 2)$$

Vì $(3k^3 + 15k) \vdots 9$ và $9(k^2 + k + 2) \vdots 9$ nên biểu thức trên chia hết cho 9.

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 4: Kí hiệu các bất đẳng thức cần chứng minh là (1), (2).

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 2$, ta có: $3^2 > 3.2 + 1 \Leftrightarrow 9 > 7$, đúng. Như vậy (1) đúng với $n = 2$.
- Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là: $3^k > 3k + 1$.

- Ta sẽ đi chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$3^{k+1} = 3.3^k > 3(3k + 1) = 9k + 3 = 3(k + 1) + 6k > 3(k + 1) + 1.$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $n = 2$, ta có: $2^3 > 2.2 + 3 \Leftrightarrow 8 > 7$, đúng. Như vậy (2) đúng với $n = 2$.
- Giả sử (2) đúng với $n = k$, tức là: $2^{k+1} > 2k + 3$.
- Ta sẽ đi chứng minh (2) cũng đúng với $n = k + 1$, thật vậy:

$$2^{k+2} = 2.\ 2^{k+1} > 2(2k + 3) = 2(k + 1) + 3 + 2k + 1 > 2(k + 1) + 3$$

Từ các chứng minh trên suy ra (2) đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). B; c). B; d). B.

Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có nhận xét:

- Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{n+1}.\sin\frac{\pi}{4}$ đan dấu nên nó không tăng.
- Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n}.(5^n + 1) = 5^n + 1$, ta có:

$$u_{n+1} = 5^{n+1} + 1 = 5.5^n + 1 > 5^n + 1 = u_n,$$ nên nó là dãy số tăng.

- Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + n}$, ta có:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + n + 1} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + n} = u_n;$$ nên nó là dãy số giảm.

- Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$, ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n^2 + 1}}{\frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 1}} = \frac{n^3 + 2n^2 + 2n}{n^3 + n^2 + n + 1} < 1;$$ nên nó là dãy số giảm.

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). D; c). D.

Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

Bài 10:

a. *Đáp số trắc nghiệm* A.

b. Kí hiệu điều cần chứng minh là (*), ta giải bài toán bằng phương pháp quy nạp như sau:

- Với $n = 1$, ta thấy (*) do kết quả từ câu a).
- Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là $u_k = 2^{k-1} + 1$.
- Ta sẽ đi chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$. thật vậy:

$$u_{k+1} = 2u_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1,$$ đpcm.

Từ các chứng minh trên suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta đi xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

Mặt khác, ta có: $u_n = n + \frac{1}{n} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 2.

b. Ta thấy ngay giá trị của u_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, do đó (u_n) không bị chặn trên.

Vậy, dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn.

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C.

a. Ta có nhận xét rằng dãy số (u_n) đan dấu nên nó không tăng, không giảm.

b. Mặt khác, ta có: $|u_n| = |(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}| = |\sin\frac{1}{n}| \leq 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

a. Ta có nhận xét:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

$$u_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = u_n$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

b. Mặt khác, ta có: $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). C; d). B.

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C; c). C; d). C.

a. Ta thấy: $u_n = 2n^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 1.

Ta thấy ngay giá trị của u_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, do đó (u_n) không bị chặn trên.

Vậy, dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn.

b. Ta thấy ngay:

- $u_n > 0$, do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $n(n + 2) \geq 3 \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{3}$, do đó nó bị chặn trên.

Vậy, ta được $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$, do đó nó bị chặn.

c. Ta thấy ngay:

- $u_n > 0$, do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $2n^2 - 1 \geq 1 \Leftrightarrow u_n \leq 1$, do đó nó bị chặn trên.

Vậy, ta được $0 < u_n \leq 1$, do đó nó bị chặn.

d. Ta thấy ngay: $u_n = \sin n + \cos n = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\Rightarrow |u_n| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}$$

Vậy, dãy số $-\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}$, do đó nó bị chặn.

Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta lần lượt có:

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1},$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2+1},$$

$$S_3 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{3+1}.$$

b. Dự đoán công thức tính tổng S_n là: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. (*)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp như sau:

- Với n = 1, ta thấy (*) do kết quả từ câu a).
- Giả sử (*) đúng với n = k, tức là: $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$.
- Ta sẽ đi chứng minh (*) cũng đúng với n = k + 1, thật vậy:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 + \frac{1-k-2}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}, \text{ đpcm.}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

a. Ta lần lượt có: $u_1 = -1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$, $u_4 = 8$, $u_5 = 11$.

b. Kí hiệu đẳng thức cần chứng minh là (*), ta lần lượt thực hiện:

- Với n = 1, ta thấy (*) do kết quả từ câu a).
- Giả sử (*) đúng với n = k, tức là $u_k = 3k - 4$.
- Ta sẽ đi chứng minh (*) cũng đúng với n = k + 1, thật vậy:

$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3(k+1) - 4, \text{ đpcm.}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 18: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Ta lần lượt có:

$$u_1 = 3 = \sqrt{1+8}, \quad u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{2+8},$$

$$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3+8}, \quad u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{4+8},$$

$$u_5 = \sqrt{13} = \sqrt{5+8}.$$

b. Dựa trên kết quả trong câu a), ta dự đoán: $u_n = \sqrt{n+8}$. (*)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp với việc lần lượt thực hiện:

- Với n = 1, ta thấy (*) do kết quả từ câu a).
- Giả sử (*) đúng với n = k, tức là $u_k = \sqrt{k+8}$.
- Ta sẽ đi chứng minh (*) cũng đúng với n = k + 1, thật vậy:

$$u_{k+1} = \sqrt{1+u_n^2} = \sqrt{1+(k+8)} = \sqrt{(k+1)+8}\text{, đpcm.}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 19: Ta có $u_3 = 5 \le \left(\frac{5}{2}\right)^3 \Rightarrow$ đúng với n = 1, 2, 3.

Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $u_{k-1} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}$ và $u_k \le \left(\frac{5}{2}\right)^k$

ta đi chứng minh $u_{k+1} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2u_k \le \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^k = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\left(\frac{4}{25}+\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\frac{24}{25} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}\text{, đpcm.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n \le \left(\frac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài 20: *Hướng dẫn*: Vì r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$ nên $c = 2r$ và $d = -r^2$, do đó u_n có dạng $u_n = 2ru_{n-1} - r^2u_{n-2}$.

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). A.

Lời giải tự luận: Ta có:

- Cấp số cộng là dãy số tăng khi d > 0.
- Cấp số cộng là dãy số giảm khi d < 0.

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Với hai cấp số cộng (u_n) và (v_n) theo thứ tự có công sai là d_1 và d_2, xét cấp số (a_n) thoả mãn:

$$a_n = u_n + v_n = [u_1 + (n-1)d_1] + [v_1 + (n-1)d_2]$$
$$= (u_1 + v_1) + (n-1)(d_1 + d_2) = a_1 + (n-1)(d_1 + d_2).$$

Vậy, dãy số (a_n) là một cấp số cộng có công sai $d = d_1 + d_2$.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, suy ra: $6 = -2 + 2d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow x = 2$ và $y = 10$.

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). D; d). C.

a. Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = [5 - 2(n+1)] - (5 - 2n) = -2$.
Do đó, dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -2$.

b. Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{n+1}{2} - 1\right) - \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{2}$.

Do đó, dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = \dfrac{1}{2}$.

c. Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n = 2.3^n$.
Do đó, dãy số (u_n) không là cấp số cộng.

d. Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7 - 3(n+1)}{2} - \dfrac{7 - 3n}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

Do đó, dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -\dfrac{3}{2}$.

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta biến đổi:

$$\begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$

Vậy, cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 16$ và $d = -3$.

b. Ta biến đổi: $\begin{cases} (u_1 + 6d) - (u_1 + 2d) = 8 \\ (u_1 + d).(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases}$

Vậy, cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $d = 2$.

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Ta biến đổi: $\begin{cases} u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \\ 4u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3 \\ u_1 = 8 \end{cases}$.

Vậy, cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 8$ và $d = -3$.

b. Ta biến đổi:

$$\begin{cases} (u_1 + 6d) + (u_1 + 14d) = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 30 \\ u_1^2 + 14du_1 + 65d^2 = 585 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 10d)^2 + 14d30 - 10d + 65d^2 = 585 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ 5d^2 - 36d + 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ d = 3 \text{ hoặc } d = 21/5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3 \text{ và } u_1 = 0 \\ d = 21/5 \text{ và } u_1 = -12 \end{array}\right.$$

Vậy, tồn tại hai cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 0$ và $d = 3$ hoặc $u_1 = -12$ và $d = \dfrac{21}{5}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 28: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Gọi độ cao của bậc thứ n là u_n. ta có ngay: $u_n = 0{,}5 + 0{,}18n$.

b. Độ cao của sàn tầng hai chính là giá trị của u_{21}, ta được:

$u_{21} = 0{,}5 + 0{,}18.21 = 4{,}28$m.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Số tiếng chuông của đồng hồ đánh từ 0 giờ đến 12 được mô tả bởi một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_{12} = 12$.

Từ đó, suy ra tổng số tiếng chuông là: $S_{12} = \frac{12}{2}(1 + 12) = 78$ tiếng.

Bài 30: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

Lời giải tự luận: Xuất phát từ công thức: $u_{n+1} = u_1.q^n$

ta lần lượt có kết luận:

a. Với $q > 0$ thì dấu của u_{n+1} cùng dấu với u_1 nên các số hạng khác sẽ mang dấu âm.

b. Với $q < 0$ thì dấu của u_{n+1} phụ thuộc vào tính chẵn, lẻ của n nên:

- Khi n chẵn thì u_n mang dấu dương.
- Khi n lẻ thì u_n mang dấu âm.

Bài 32:

Với hai cấp số nhân (u_n) và (v_n) theo thứ tự có công bội là q_1 và q_2, xét cấp số (a_n) thoả mãn: $a_n = u_n.v_n = (u_1.q_1^{n-1}).(v_1.q_2^{n-1}) = (u_1.v_1).(q_1q_2)^{n-1}$.

Vậy, dãy số (a_n) là một cấp số nhân có công bội $q = q_1.q_2$.

Bài 33: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Xét tỉ số: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{5}.2^{n+1}}{\frac{3}{5}.2^n} = 2$.

Do đó, dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

b. Xét tỉ số: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \frac{1}{2}$.

Do đó, dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$.

c. Xét tỉ số: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}$.

Do đó, dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{2}$.

Bài 34: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, suy ra:

$$-9 = -4.q^2 \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow x = 6 \text{ hoặc } x = -6.$$

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Ta có: $u_6 = u_1.q^5 \Leftrightarrow 486 = 2.q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3$.
Vậy, ta nhận được $q = 3$.

b. Ta có: $u_4 = u_1.q^3 \Leftrightarrow \frac{8}{21} = u_1.\left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow u_1 = \frac{9}{7}$.

Vậy, ta nhận được $u_1 = \frac{9}{7}$.

c. Giả sử 192 là số hạng thứ n, khi đó:

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 192 = 3.(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = 64 \Leftrightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy, số 192 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $u_5 = u_3.q^2 \Leftrightarrow 27 = 3.q^2 \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$.

Vậy, ta có:
- Với $q = 3$ thì $u_1 = \frac{1}{3}$.
- Với $q = -3$ thì $u_1 = \frac{1}{3}$.

b. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 25 \\ u_1(q^2 - 1) = 50 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -\frac{200}{3}.$$

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Ta biến đổi: $\begin{cases} u_1.q^5 = 192 \\ u_1.q^6 = 384 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{384}{192} = 2 \Rightarrow u_1 = 6.$

Vậy, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 6$ và $q = 2$.

b. Ta biến đổi: $\begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1.q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(q^2 - 1) = 72 \\ u_1.q^2(q^2 - 1) = 144 \end{cases}$

$\Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 12$. Vậy, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 12$ và $q = 2$.

c. Ta biến đổi: $\begin{cases} u_1.q + u_1.q^4 - u_1.q^3 = 10 \\ u_1.q^2 + u_1.q^5 - u_1.q^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(1 + q^3 - q^2) = 10 \\ u_1.q^2(1 + q^3 - q^2) = 20 \end{cases}$

$\Rightarrow q = \frac{20}{10} = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và $q = 2$.

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \ldots + u_5 = 31 \\ u_2 + u_3 + \ldots + u_6 = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + \ldots + u_5 = 31 \\ q(u_1 + u_2 + \ldots + u_5) = 62 \end{cases} \Rightarrow q = 2.$$

Mặt khác, ta cũng có: $S_5 = \dfrac{(q^5 - 1)u_1}{q - 1} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{(q - 1)S_5}{q^5 - 1} = \dfrac{(2 - 1).31}{2^5 - 1} = 1.$

Vậy, ta có $u_1 = 1$ và $q = 2$.

Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Từ giả thiết, ta nhận thấy dân số hàng năm của tỉnh X là một cấp số nhân có: $u_1 = 1{,}8$ triệu và $q = 1 + \dfrac{14}{1000} = 1{,}014$.

a. Khi đó, dân số của tỉnh X sau 5 năm bằng: $u_6 = u_1.q^5 = 1{,}8.(1{,}014)^5 \approx 1{,}9$ triệu.

b. Khi đó, dân số của tỉnh X sau 10 năm bằng:

$u_{11} = u_1.q^{10} = 1{,}8.(1{,}014)^{10} \approx 2{,}1$ triệu.

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

- Cạnh của hình vuông C_1 là $a_1 = 4$.
- Cạnh của hình vuông C_2 là: $a_2 = \sqrt{\left(\dfrac{a_1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a_1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a_1.$
- Cạnh của hình vuông C_3 là: $a_3 = \sqrt{\left(\dfrac{a_2}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a_2}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a_2.$

Từ đó, ta có: $a_n = \sqrt{\left(\dfrac{a_{n-1}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a_{n-1}}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}a_{n-1}.$

Vậy, dãy số (a_n) là một cấp số nhân với $a_1 = 4$ và công sai $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Gọi q là công bội của cấp số nhân.

Các số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng, suy ra:

$$x + 3z = 4y \Leftrightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ loại} \\ 3q^2 - 4q + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, cấp số nhân có công bội $q = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{3}$.

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Gọi diện tích của các bề mặt từ đế tháp lên tới tầng 11 là S_n với $n = \overline{1, 12}$, ta thấy ngay (S_n) là một cấp số nhân có $S_1 = 12\,288\text{m}^2$ và $q = \dfrac{1}{2}$.

Từ đó, suy ra diện tích mặt trên cùng là: $S_{12} = S_1.q^{11} = 12\,288.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11} = 6\text{m}^2$.

CHƯƠNG IV.

GIỚI HẠN

§1 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

***Định nghĩa**: Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** 0 (hay có giới hạn 0) nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$, viết tắt là $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.

***Nhận xét**:*

- Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số ($|u_n|$) có giới hạn 0.
- Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

2. MỘT SỐ DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0 THƯỜNG GẶP

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

a. $\lim \frac{1}{n} = 0.$ b. $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$ c. $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

Định lí 1: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2: Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1: Khẳng định dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 là đúng hay sai ?

a. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+5}$.

A. Đúng. **B.** Sai.

C. Đúng. **D.** Sai.

b. $u_n = \frac{\sin n}{n+5}$.

c. $u_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}$.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 2: Khẳng định dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 là đúng hay sai ?

a. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 3: Khẳng định dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 là đúng hay sai ?

a. $(0,99)^n$.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n+1}$.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}$.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 4: Khẳng định dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ có giới hạn 0 là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

§2 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

III. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN

Định nghĩa: *Ta nói* ***dãy số*** (u_n) ***có giới hạn là số thực*** L *nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - L) = 0$.

Khi đó, ta viết:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = L$, viết tắt là $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

2. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ

Định lí 1: Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

a. $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b. Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 2: Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

a. Các dãy số $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n.v_n)$ và (cu_n) có giới hạn và:

- $\lim(u_n + v_n) = L + M$.
- $\lim(u_n - v_n) = L - M$.
- $\lim(u_n.v_n) = LM$.
- $\lim(cu_n) = cL$.

b. Nếu $M \neq 0$ thì dãy số $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ có giới hạn và $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Với cấp số nhân (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ thì:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 5: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\left[2 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

b. $\lim\left(\dfrac{\sin 3n}{4n} - 1\right)$.

A. −2. **B.** −1. **C.** 1. **D.** 2.

c. $\lim \dfrac{n-1}{n}$.

A. −2. **B.** −1. **C.** 1. **D.** 2.

d. $\lim \dfrac{n+2}{n+1}$.

A. −1. **B.** −2. **C.** 2. **D.** 1.

Bài 6: Tìm $\lim u_n$ với:

a. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 1}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

b. $u_n = \dfrac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$.

A. −2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

c.

$u_n = \dfrac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$.

A. −3. **B.** −2. **C.** 0. **D.** 1.

d. $u_n = \dfrac{4^n}{2.3^n + 4^n}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Bài 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$.

a. Dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \dfrac{15}{4}$ có là một cấp số nhân không ? Nếu có hãy tìm công bội của nó.

A. Có và công bội $q = \dfrac{1}{5}$. **C.** Có và công bội $q = \dfrac{1}{4}$.

B. Có và công bội $q = 5$. **D.** Không.

b. Tìm $\lim u_n$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{20}$.

Bài 8: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của ΔABC, $\Delta A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của $\Delta A_1B_1C_1$, ..., $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của $\Delta A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, ..., p_n$ và $S_1, S_2, ...S_n, ...$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các $\Delta A_1B_1C_1, \Delta A_2B_2C_2, ..., \Delta A_nB_nC_n, ...$

a. Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

A. $\lim(p_n) = \lim(S_n) = 0$. **C.** $\lim(p_n) = \lim(S_n) = 1$.

B. $\lim(p_n) = 1, \lim(S_n) = 0$. **D.** $\lim(p_n) = 0, \lim(S_n) = 1$.

b. Tính các tổng:

$$P = p_1 + p_2 + ... + p_n + ... \text{ và } S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$$

A. $P = 2a$ và $S = a^2$. **C.** $P = 2a$ và $S = 2a^2$.

B. $P = 3a$ và $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $P = 3a$ và $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 9: Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a. 0,444...

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{44}{99}$. **C.** $\dfrac{444}{999}$. **D.** $\dfrac{4444}{9999}$.

b. 0,2121....

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{21}{99}$. **C.** $\dfrac{212}{999}$. **D.** $\dfrac{2121}{9999}$.

c. 0,32111....

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{28}{90}$. **C.** $\dfrac{289}{900}$. **D.** $\dfrac{2893}{9000}$.

Bài 10: Gọi (C) là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

- C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,
- C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$,

  ...

- C_1 là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ...

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a. Tính p_n và S_n.

A. $p_n = \pi R$, $S_n = \frac{\pi R^2}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$. **C.** $p_n = 3\pi R$, $S_n = \frac{\pi R^2}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

B. $p_n = 2\pi R$, $S_n = \frac{\pi R^2}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$. **D.** $p_n = 4\pi R$, $S_n = \frac{\pi R^2}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

A. $\lim(p_n) = \pi R$, $\lim(S_n) = 0$. **C.** $\lim(p_n) = 3\pi R$, $\lim(S_n) = 0$.

B. $\lim(p_n) = 2\pi R$, $\lim(S_n) = 0$. **D.** $\lim(p_n) = 4\pi R$, $\lim(S_n) = 0$.

§3 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN +∞

***Định nghĩa**: Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** $+\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$, viết tắt là $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

a. $\lim n = +\infty$. b. $\lim \sqrt{n} = +\infty$. c. $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN −∞

***Định nghĩa**: Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** $-\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều nhỏ hơn một số âm tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.*

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty,$$ viết tắt là $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

Nhận xét: Nếu $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim(-u_n) = +\infty$.

Chú ý:

- Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
- Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

3. MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Quy tắc 1: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	–	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	–	$+\infty$

Quy tắc 3: Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n \neq 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

4. MỘT SỐ KẾT QUẢ

a. $\lim \frac{q^n}{n} = +\infty$ và $\lim \frac{n}{q^n} = 0$, với $q > 1$.

Mở rộng: Ta có $\lim \frac{q^n}{n^k} = +\infty$ và $\lim \frac{n^k}{q^n}$, với $q > 1$ và k là một số nguyên dương.

b. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

- Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = L \in \mathbf{R}$ và $\lim |v_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim v_n = L \in \mathbf{R}$ thì $\lim (u_n + v_n) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 11: Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = -2n^3 + 3n + 5$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n}$.

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Bài 12: Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = \dfrac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Bài 13: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(2n + \cos n)$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5)$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

Bài 14: Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

a. $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2^n - 1}$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

b. $u_n = 2^n - 3^n$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Bài 15: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \dfrac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$.

A. 0. **B.** 4. **C.** -5. **D.** $+\infty$.

b. $\lim \dfrac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** -4. **D.** $+\infty$.

c. $\lim \dfrac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $+\infty$.

d. $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$.

A. $-\infty$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $+\infty$.

Bài 16: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(3n^3 - 7n + 11)$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** 11. **D.** $+\infty$.

b. $\lim \sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2}$.

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

c. $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

d. $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $+\infty$.

Bài 17: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$:

b. $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n + 2} - \sqrt{n + 1}}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Bài 18: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n + 1})$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

b. $\lim \dfrac{1}{\sqrt{3n + 2} - \sqrt{2n + 1}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Bài 19: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n})n$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Bài 20: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $u_1 = 1$ và $q = \frac{2}{5}$. **C.** $u_1 = -1$ và $q = \frac{2}{5}$.

B. $u_1 = 1$ và $q = \frac{5}{3}$. **D.** $u_1 = -1$ và $q = \frac{5}{3}$.

§4 ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1 *(Giới hạn hữu hạn): Giả sử* (a; b) *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* $y = f(x)$ *là một hàm số xác định trên một khoảng* (a; b), *có thể trừ ở một điểm* x_0. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong tập hợp* $(a; b)\backslash\{x_0\}$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, với c là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa 2 *(Giới hạn vô cực): Giả sử* (a; b) *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* $y = f(x)$ *là một hàm số xác định trên một khoảng* (a; b), *có thể trừ ở một điểm* x_0. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn vô cực khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong tập hợp* $(a; b)\backslash\{x_0\}$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = \pm\infty$.

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ hoặc $f(x) \to \pm\infty$ khi $x \to x_0$.

2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3: *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(a; +\infty)$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** $+\infty$ *nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(a; +\infty)$ *mà* $\lim x_n = +\infty$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Chú ý: Các giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ta có, các kết quả sau với số nguyên dương k bất kì cho trước:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0.$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}.$

3. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1: *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbf{R}$). *Khi đó:*

a. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$

b. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M;$

Đặc biệt, nếu c là hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} [c.f(x)] = cL;$

c. Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}.$

Định lí 2: *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbf{R}$. *Khi đó:*

a. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|;$

b. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L};$

c. Nếu $f(x) \geq 0$ với thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$

Định lí 3: *Giả sử* f(x), g(x) *và* h(x) *là ba hàm số xác định trên một khoảng* (a; b) *chứa điểm* x_0, *có thể trừ ở một điểm* x_0. *Nếu* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *với mọi* $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L.$

Chú ý: Các định lí 1, định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to \pm\infty$.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài 21: Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}.$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}.$

Bài 22: Cho hàm số $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ và hai dãy số (x'_n), (x''_n) với:

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad x''_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

a. Tìm giới hạn của các dãy số (x'_n), $(f(x'_n))$.

A. $\lim x'_n = 0, \lim f(x'_n) = 0.$ **C.** $\lim x'_n = 1, \lim f(x'_n) = 1.$

B. $\lim x'_n = 0, \lim f(x'_n) = 1.$ **D.** $\lim x'_n = 1. \lim f(x'_n) = 0.$

b. Tìm giới hạn của các dãy số (x''_n), $(f(x''_n))$.

A. $\lim x''_n = 1, \lim f(x''_n) = 1.$ **C.** $\lim x''_n = 0, \lim f(x''_n) = 1.$

B. $\lim x''_n = 0, \lim f(x''_n) = 0.$ **D.** $\lim x''_n = 1, \lim f(x''_n) = 0.$

c. Tồn tại hay không $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$?

A. Có. **B.** Không.

Bài 23: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 + 7x + 11).$

A. 37. **B.** 34. **C.** 33. **D.** 27.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}.$

A. −4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

c. $\lim\limits_{x \to 0} x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right).$

A. $-\infty$. **B.** −3, **C.** −1. **D.** 2.

d. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}.$

A. $-\infty$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{54}$.

e. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} |x^2 - 4|.$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

f. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}.$

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $+\infty$.

Bài 24: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}.$

A. 0. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

A. $-\infty$. **B.** **C.** **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Bài 25: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

§5 GIỚI HẠN MỘT BÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa 1 *(Giới hạn phải): Giả sử hàm số* f(x) *xác định trên một khoảng* $(x_0; b)$ $(x_0 \in \mathbf{R})$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn phải là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(x_0; b)$ *.mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Định nghĩa 2 *(Giới hạn trái): Giả sử hàm số* f(x) *xác định trên một khoảng* $(a; x_0)$ $(x_0 \in \mathbf{R})$. *Ta nói* ***hàm số*** f(x) ***có giới hạn trái là số thực*** L ***khi*** x ***dần đến*** x_0 *(hoặc* ***tại điểm*** x_0*) nếu với mọi số dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(a; x_0)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Định lí: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = L$ là:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L.$$

Chú ý:

1. Các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.
2. Định lí vẫn đúng với giới hạn vô cực.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài 26: Áp dụng định nghĩa giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1}$.

b. $\lim\limits_{x \to 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x)$.

c. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$.

d. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3}$.

Bài 27: Tìm các giới hạn sau (nếu có):

a. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

b. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Không có.

Bài 28: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$.

A. -2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4 - x^2}{\sqrt{2-x}}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 29: Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} 2|x|-1 & \text{với } x \le -2 \\ \sqrt{2x^2+1} & \text{với } x > -2 \end{cases}$.

a. Tìm $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

b. Tìm $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

c. Tìm $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ (nếu có).

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Không có.

Bài 30: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} |x^2 - 8|$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{7}{8}$. **C.** $\dfrac{8}{7}$. **D.** $+\infty$.

Bài 31: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2 - 3}}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2 - 6}}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Bài 32: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{1 - x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Bài 33: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$.

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}$.

A. $-\infty$. **B.** 9. **C.** 27. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8}$.

A. $-\infty$. **B.** 6. **C.** -16. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}}$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Bài 34: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x-3}$.

A. $-\infty$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}}$.

A. $-\infty$. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 0.

Bài 35: Cho hàm số:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & \text{với } x\le 2 \\ 4x-3 & \text{với } x>2 \end{cases}.$$

a. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

b. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

c. Tìm $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (nếu có).

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** Khong có.

§6 MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Quy tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)]$ được cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

Chú ý:

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 36: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$.

A. $-\infty$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $+\infty$.

Bài 37: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x + 1}{x - 2}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x+1}{x-2}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Bài 38: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Bài 39: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-5}{x^2+1}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Bài 40: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} . \dfrac{2x+1}{2x-3}\right]$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$.

A. $-\infty$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $+\infty$.

§7 CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán 1: Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$.

Phương pháp chung: Bản chất của việc khử dạng không xác định $\frac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để:

- Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định.
- Hoặc đưa giới hạn về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Ghi chú:

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x) = (x - x_0).g(x)$.
- Liên hợp của biểu thức: $\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$.

$\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$.

Chú ý: Với giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ của các hàm phân thức đại số, cụ thể $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các hàm đa thức nhận $x = x_0$ làm nghiệm.

Khi đó :
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \ldots$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = \frac{f_k(x_0)}{g_k(x_0)}$$

với điều kiện $f_k^2(x_0) + g_k^2(x_0) > 0$.

Bài toán 2: Tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Phương pháp chung: Để tính các giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1 : (*Được sử dụng cho các phân thức đại số*) Ta chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó.

Cách 2 : Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Chọn hai hàm số $g(x)$, $h(x)$ thoả mãn : $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

Bước 2: Khẳng định : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = L$.

Bước 3 : Kết luận $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

Bài toán 3: Giới hạn dạng $\infty - \infty$.

Phương pháp chung: Sử dụng các phương pháp đã biết để tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ chúng ta tính được giới hạn dạng $\infty - \infty$ thông qua phép nhân liên hợp.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 41: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 11. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $+\infty$.

Bài 42: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$.

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$.

A. $-\infty$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $+\infty$.

Bài 43: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Bài 44: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $+\infty$.

Bài 45: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** 11. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** 12. **D.** $+\infty$.

Bài 46: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$.

A. $-\infty$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Bài 47: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4-x^3+11}{2x-7}$.

A. $-\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Bài 48: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\frac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}$.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}$.

A. $-\infty$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-x}$.

A. $-\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}$.

A. $-\infty$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $+\infty$.

Bài 49: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{2x^2+1}+x)$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Bài 50: Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$.

A. 0. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$.

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $+\infty$.

§8 HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b). *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là liên tục tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ *nếu :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu tại điểm x_0 hàm số $y = f(x)$ không liên tục, thì được gọi là *gián đoạn* tại x_0 và điểm x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số $y = f(x)$.

Chú ý 1: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu ba điều kiện sau được đồng thời thoả mãn :

(i). $f(x)$ xác định tại x_0.

(ii). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại.

(iii). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 nếu một trong ba điều kiện trên không được thoả mãn.

Chú ý 2: Nếu sử dụng giới hạn một phía thì :

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trái tại điểm* x_0.
2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục phải tại điểm* x_0.
3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Đặc trưng khác của tính liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a ; b)$. Giả sử x_0 và $x (x \neq x_0)$ là hai phần tử của $(a ; b)$.

- Hiệu $x - x_0$, kí hiệu là Δx (đọc là đen - ta x), được gọi là *số gia của đối số tại điểm* x_0. Ta có : $\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x$.
- Hiệu $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$, kí hiệu là Δy, được gọi là *số gia tương ứng của hàm số tại điểm* x_0. Ta có :

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Đặc trưng : Dùng khái niệm số gia, ta có thể đặc trưng tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 như sau:

Định lí 1. *Một hàm số* $y = f(x)$, *xác định trên* $(a; b)$, *là liên tục tại* $x_0 \in (a; b)$ *nếu và chỉ nếu :* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2: Ta có :

a. *Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trong khoảng (a; b) nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.*

b. *Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó*

- *Liên tục trong khoảng (a; b),*
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *(liên tục bên phải tại điểm a),*
- $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *(liên tục bên trái tại điểm b).*

***Chú ý* :**

1. Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.
2. Khi ta nói hàm số y = f(x) liên tục mà không chỉ ra trên khoảng nào thì có nghĩa là hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí 2. *Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.*

Định lí 3. *Các hàm số đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm số lượng giác là liên tục trên tập xác định của chúng.*

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 51: Chứng minh rằng các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ và $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbf{R}$.

Bài 52: Chứng minh rằng:

a. Hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2 \\ 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm x = 2.

b. Hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{với } x \neq 1 \\ 2 & \text{với } x = 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm x = 1.

Bài 53: Chứng minh rằng:

a. Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên **R**.

b. Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ liên tục trên khoảng (–1; 1).

Bài 54: Chứng minh rằng:

a. Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ liên tục trên đoạn [–2; 2].

b. Hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ liên tục trên nửa khoảng $[\frac{1}{2}; +\infty)$.

Bài 55: Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây liên tục trên tập xác định của nó:

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$.   b. $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}$.

Bài 56: Chứng minh rằng phương trình: $x^2\cos x + x.\sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Bài 57: Chứng minh rằng:

a. Hàm số: $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{với } x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$

gián đoạn tại điểm $x = 0$.

b. Mỗi hàm số: $g(x) = \sqrt{x - 3}$ và $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 2} & \text{với } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{với } x > 1 \end{cases}$

liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 58: Giải thích tại sao :

a. Hàm số $f(x) = x^2\sin x - 2\cos^2 x + 3$ liên tục trên **R**.

b. Hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + x.\cos x + \sin x}{2\sin x + 3}$ liên tục trên **R**

c. Hàm số $h(x) = \dfrac{(2x + 1)\sin x - \cos^3 x}{x.\sin x}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq k\pi$, $k \in$ **Z**.

Bài 59: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^2 + x + 3 + \dfrac{1}{x - 2}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 60: Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). A.

a. Ta có: $\left|\frac{(-1)^n}{n+5}\right| = \left|\frac{1}{n+5}\right| < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0$, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có: $\left|\frac{\sin n}{n+5}\right| = \left|\frac{1}{n+5}\right| < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0$, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

c. Ta có: $\left|\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ và $\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài 2: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta có: $\left|\frac{1}{n(n+1)}\right| < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0$, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có: $\left|\frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}\right| = \left|\frac{\cos n}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0$,

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài 3: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). A.

a. Ta có: $(0,99)^n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$ và $\lim\left(\frac{99}{100}\right)^n = 0$, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

b. Ta có: $\left|\frac{(-1)^n}{2^n+1}\right| = \left|\frac{1}{2^n+1}\right| < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ và $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$,

từ đó suy ra điều cần chứng minh.

c. Ta có: $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1,01)^n}\right| < \frac{1}{(1,01)^n} = \left(\frac{1}{1,01}\right)^n$ và $\lim\left(\frac{1}{1,01}\right)^n = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Sử dụng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng:

$$0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ với mọi n.}$$

Từ kết quả đó, ta có: $u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ và $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Ta có: $\lim\left[2 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right] = \lim 2 + \lim\frac{(-1)^n}{n+2} = 2.$

b. Ta có: $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n}-1\right)=\lim\frac{\sin 3n}{4n}-1=0-1=-1.$

c. Ta có: $\lim\frac{n-1}{n}=\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$

d. Ta có: $\lim\frac{n+2}{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1+0=1.$

Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Ta có: $\lim u_n=\lim\frac{n^2-3n+5}{2n^2-1}=\lim\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$

b. Ta có: $\lim u_n=\lim\frac{-2n^2+n+2}{3n^4+5}=\lim\frac{-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{3+\frac{5}{n^4}}=\frac{0}{3}=0.$

c. Ta có: $\lim u_n=\lim\frac{\sqrt{2n^2-n}}{1-3n^2}=\lim\frac{\sqrt{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}}{\frac{1}{n^2}-3}=\frac{0}{-3}=0.$

d. Ta có: $\lim u_n=\lim\frac{4^n}{2.3^n+4^n}=\lim\frac{1}{2.\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=1.$

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Nhận xét rằng: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-\frac{15}{4}}{u_n-\frac{15}{4}}=\frac{\frac{1}{5}u_n+3-\frac{15}{4}}{u_n-\frac{15}{4}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$

từ đó, suy ra (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q=\frac{1}{5}$.

b. Từ kết quả câu a), ta có: $v_n=v_1.q^{n-1}=(u_1-\frac{15}{4}).\frac{1}{5^{n-1}}=\frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow u_n=v_n+\frac{15}{4}=\frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{15}{4}.$$

Từ đó, ta được: $\lim u_n=\lim\left[\frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{15}{4}\right]=\frac{15}{4}.$

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta lần lượt có nhận xét:

- Với dãy số (p_n) thì: $p_2 = \frac{1}{2}p_1$, $p_3 = \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2^2}p_1$, ...

  Từ đó, ta dự đoán được:

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}}p_1 = \frac{3a}{2.2^{n-1}} = \frac{3a}{2^n}$$ – *Chứng minh bằng quy nạp.*

  Do đó: $\lim p_n = \lim\frac{3a}{2^n} = 3a.\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

- Với dãy số (S_n) thì: $S_2 = \frac{1}{4}S_1$, $S_3 = \frac{1}{4}S_2 = \frac{1}{4^2}S_1$, ...

Từ đó, ta dự đoán được: $S_n = \frac{1}{4^{n-1}}S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16.4^{n-1}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$ – *Chứng minh bằng quy nạp.*

  Do đó: $\lim S_n = \lim\frac{a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}} = a^2\sqrt{3}.\lim\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0.$

b. Ta lần lượt có nhận xét:

- Dãy số (p_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2} < 1$ và $p_1 = \frac{3a}{2}$ nên:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = \frac{p_1}{1-q} = \frac{\frac{3a}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3a.$$

- Dãy số (p_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ và $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ nên:

$$S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Nhận xét rằng: $0,444... = 0,4 + 0,04 + 0,004... = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + ...$

trong đó, các số $\frac{4}{10}, \frac{4}{100}, \frac{4}{1000}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{4}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó, suy ra: $0,444... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}.$

b. Nhận xét rằng: $0,2121... = 0,21 + 0,0021 + ... = \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + ...$

trong đó, các số $\frac{21}{100}, \frac{21}{10000}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{21}{100}$ và công bội $q = \frac{1}{100}$.

Từ đó, suy ra: $0,2121... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{21}{99}$.

c. Nhận xét rằng:

$$0,32111... = 0,32 + 0,001 + 0,0001... = 0,32 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ...$$

trong đó, các số $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{1000}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó, suy ra: $0,32111... = 0,32 + \frac{u_1}{1-q} = \frac{32}{100} + \frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{289}{900}$.

Bài 10: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Trước tiên, ta thấy các $C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ...$ là các đường gồm hai nửa đường tròn bán kính theo thứ tự bằng $\frac{R}{2}, \frac{R}{2^2}, ..., \frac{R}{2^n}, ...$

Từ đó, suy ra: $p_n = 2^n.\frac{\pi R}{2^n} = \pi R$, $S_n = 2^n.\frac{1}{2}.\pi.\left(\frac{R}{2^n}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. Ta lần lượt có: $\lim p_n = \lim \pi R = \pi R$, $\lim S_n = \lim \frac{\pi R^2}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\pi R^2}{2}.0 = 0$.

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Ta có: $\lim u_n = \lim(-2n^3 + 3n + 5) = \lim[-n^3(2 - \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3}) = -\infty$.

b. Ta có: $\lim u_n = \lim \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n} = \lim \sqrt{n^4(3 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3})} = +\infty$.

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = -\infty$.

b. Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12} = \lim \dfrac{\sqrt{n^4 - 7n - \dfrac{5}{n} + \dfrac{8}{n^2}}}{1 + \dfrac{12}{n}} = +\infty.$

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). D b). D

a. Ta có: $2n + \cos n \ge 2n - 1$ và $\lim(2n - 1) = +\infty$

từ đó, suy ra: $\lim(2n + \cos n) = +\infty$.

b. Ta có: $\dfrac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \ge \dfrac{1}{2}n^2 + 2$ và $\lim(\dfrac{1}{2}n^2 + 2) = +\infty$

từ đó, suy ra: $\lim(\dfrac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5) = +\infty$.

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A

a. Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{3^n + 1}{2^n - 1} = \lim \dfrac{1 + \dfrac{1}{3^n}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{3^n}} = +\infty.$

b. Ta có: $\lim u_n = \lim(2^n - 3^n) = \lim 3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -\infty.$

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D; c). C; d). B.

a. Ta có: $\lim \dfrac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n} + \dfrac{4}{n^2} - \dfrac{5}{n^3}}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{7}{n^3}} = 0.$

b. Ta có: $\lim \dfrac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9} = \lim \dfrac{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^4} - \dfrac{2}{n^5}}{\dfrac{4}{n^2} + \dfrac{6}{n^3} + \dfrac{9}{n^5}} = +\infty.$

c. Ta có: $\lim \dfrac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3} = \lim \dfrac{\sqrt{2 + \dfrac{3}{n^3} - \dfrac{2}{n^4}}}{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

d. Ta có: $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n - 2.}{7\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 3} = -\dfrac{2}{3}.$

Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D; c). A; d). D.

a. Ta có: $\lim(3n^3 - 7n + 11) = +\infty$.

b. Ta có: $\lim\sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2} = +\infty$.

c. Ta có: $\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3} = -\infty$.

d. Ta có: $\lim\sqrt{2.3^n - n + 2} = \lim\sqrt{3^n\left(2 - \frac{n}{3^n} + \frac{2}{3^n}\right)} = +\infty$.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* a). B b). D

a. Ta có: $\lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) = \lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim\frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}$

b. Ta có: $\lim\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \lim(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = +\infty$.

Bài 18: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Ta có: $\lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1}) = \lim\frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n+1}}$

$$= \lim\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = +\infty.$$

b. Ta có: $\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}} = \lim\frac{\sqrt{3n+2} + \sqrt{2n+1}}{n+1}$

$$= \lim\frac{\sqrt{\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{1}{n}} = 0.$$

Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). B.

a. Ta có: $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n = \lim\frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = +\infty$.

b. Ta có: $\lim\frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n+1}}{3n+2} = \lim\frac{n^2 - n}{(3n+2)(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n+1})}$

$$= \lim\frac{1 - \frac{1}{n}}{(3 + \frac{2}{n})\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Với cấp số nhân (u_n) có công bội $q \neq 0$ và $|q| < 1$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{5}{3} \\ u_1 + u_2 + u_3 = \dfrac{39}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 = 5(1-q) \\ u_1(1+q+q^2) = \dfrac{39}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1+q+q^2} = \frac{125(1-q)}{39} \Leftrightarrow q = \frac{2}{5} \Rightarrow u_1 = 1.$$

Vậy, cấp số nhân $u_1 = 1$ và $q = \dfrac{2}{5}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 21:

a. Đặt: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq -1$ với mọi n và $\lim x_n = -1$, ta có:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 3x_n - 4}{x_n + 1} = x_n - 4.$$

Do đó: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = \lim(x_n - 4) = \lim x_n - 4 = -1 - 4 = -5.$

b. Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n < 5$ với mọi n và $\lim x_n = 1$, ta có:

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{5-x_n}}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{5-x_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{5-1}} = \dfrac{1}{2}.$

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). B.

a. Ta lần lượt có: $\lim x'_n = \lim \dfrac{1}{2n\pi} = 0,\qquad \lim x''_n = \lim \dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}} = 0.$

$$\lim f(x'_n) = \lim(\cos 2n\pi) = 1, \qquad \lim f(x''_n) = \lim\left[\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0.$$

b. Từ kết quả câu a), suy ra $\lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D, e). A; f). B.

a. Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 + 7x + 11) = 37.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)} = 0.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} x\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1.$

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x(9-x)} = -\lim\limits_{x\to 9} \frac{1}{x(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{54}.$

e. Ta có: $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} |x^2-4| = 1.$

f. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\frac{x^4+3x-1}{2x^2-1}} = \sqrt{3}.$

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+7}{2x^3-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = 0.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}} = 2.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{3}.$

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{3}.$

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+2x}{8x^2-x+3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{1+\frac{2}{x}}{8-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{2}$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0.$

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C; c). D; d). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0;$ b.Ta có: $\lim\limits_{x\to 5^-} (\sqrt{5-x}+2x) = 10.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$;   d. Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$.

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1$.

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} 1 = -1$.

c. Từ kết quả câu a) và b) suy ra giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ không tồn tại.

Bài 28: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = -2$.

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{x\to 2^-} (2+x)\sqrt{2-x} = 0$.

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^4(x+1)}} = \lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{(x+2)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^4}} = 0$.

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C; c). C.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} (2|x|-1) = 3, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \sqrt{2x^2+1} = 3, \qquad (2)$$

từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$.

Bài 30: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} |x^2-8| = 5$.   b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x} = \dfrac{7}{8}$.

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.   b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}} = 2$.

Bài 32: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{1-x^3}-3x}{2x^2+x-3} = 3$.

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2|x+1|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3} = 3$.

Bài 33: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}} \dfrac{x^3+2\sqrt{2}}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}} \dfrac{x^2-x\sqrt{2}+2}{x-\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x(x^2+3x+9)}{2x+3} = 9$.

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x^2+4)(x-2)}{x+4} = -16$.

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}+x-1}{\sqrt{x^2-x^3}} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-x^3}} - \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x^3}}$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}} = 1.$$

Bài 34: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^5}}{\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}} = 1$.

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}} = 2$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2}{2-\dfrac{3}{x}} = \dfrac{1}{2}$.

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}} = 0$.

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C; c). D.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} (x^2-2x+3) = 3, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} (4x-3) = 5, \tag{2}$$

từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ không tồn tại.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3-5x^2+7)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3}\right)=-\infty.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sqrt{2-\frac{3}{x^3}+\frac{12}{x^4}}=+\infty.$

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+1}{x-2}=+\infty;$ b. Ta có: $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x+1}{x-2}=-\infty.$

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta biến đổi: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}.$

Vì $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$ và $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ và $x^2>0$ với $x\neq0$ nên:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty.$$

b. Ta biến đổi: $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{x+1}{x^2-4}.$

Vì: $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3$ và $\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-4)=0$ và $x^2-4<0$ với $x\neq2$

nên: $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=-\infty.$

Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-5}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=+\infty.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}-2}=+\infty.$

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\frac{2x+1}{2x-3}\right]=-\infty.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to1}\frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{5}{(x-1)^2(x-2)}=-\infty.$

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). A; c). D; d). B.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=3.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{2x-1}{x+3}=-\infty.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}=-\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{2x-1}{x+3}=+\infty.$

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{(x^2+x)(\sqrt{x^3+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x^3+1}+1)}=0.$$

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). C.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-10}{9-3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}}{\dfrac{9}{x^3}-3}=0.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}}{-3-\dfrac{17}{x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

Bài 43: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-x+1)\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{x-1}}=0.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{x^3+x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(1-\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})^2}{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

Bài 44: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2+2x-1}{(x^2-x)(\sqrt{2x-x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+1}{x(\sqrt{2x-x^2}+1)}=0.$

Bài 45: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). C.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}=+\infty.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)=12.$

Bài 46: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{6}.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}.$

Bài 47: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4-x^3+11}{2x-7}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{11}{x^4}}{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}}=+\infty.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}}=-\infty.$

Bài 48: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). D; d). C.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{x^2-x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{16}.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}=+\infty.$

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{3(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\dfrac{1}{6}.$

Bài 49: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). A; d). D.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}=-\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\dfrac{x^2(2x^3+x)}{x^5-x^2+3}}=-\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^5}}}=-\sqrt{2}.$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{10}{x}}=-2.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1-\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}-2}=-\infty.$

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}-\dfrac{1}{x}}=+\infty.$

Bài 50: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). C; c). A; d). D.

a. Ta có:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x})}=+\infty.$$

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{2+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2}.$

c. Ta có: $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=0.$

d. Ta có: $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x\sqrt{x-2}}=+\infty.$

Bài 51: Ta lần lượt có nhận xét:

- Hàm số f(x) là hàm đa thức nên nó liên tục trên **R**.
- Hàm số g(x) là hàm phân thức nên nó liên tục trên tập xác định (tức là trên **R**).

Bài 52:

a. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbf{R}$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-1)=1,\qquad f(2)=1.$

như vậy, ta được $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$. Vậy, hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$.

b. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbf{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3,\qquad f(1)=2.$

như vậy, ta được $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

Vậy, hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=1$.

Bài 53:

a. Hàm số f(x) là hàm đa thức nên nó liên tục trên **R**.

b. Hàm số xác định trên khoảng (–1; 1).

Với $x_0 \in (-1; 1)$, ta có: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} = f(x_0)$.

Vậy, hàm số liên tục trên khoảng (–1; 1).

Bài 54: *Bạn đọc tự giải.*

Bài 55: *Bạn đọc tự giải.*

Bài 56: Xét hàm số $f(x) = x^2\cos x + x.\sin x + 1$ liên tục trên $(0; \pi)$.

Ta có : $f(0).f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$,

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0 ; \pi)$.

Bài 57:

a. Hàm số xác định với mọi $x \in$ **R**.

Ta có : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1)^2 = 1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Tức là, hàm số gián đoạn tại điểm x = 0.

b. Hàm số xác định với mọi $x \in$ **R**.

Trước tiên, ta thấy hàm số liên tục với mọi $x \neq 1$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ta có:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \text{ và } \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 2} = -1,$$

$f(1) = -1$,

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$. Tức là, hàm số liên tục tại điểm x = 1.

Vậy, hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 58:

a. Hàm số f(x) liên tục trên **R**, bởi:

- Nó xác định trên **R**.
- Nó là tổng của các hàm số liên tục trên **R**.

b. Hàm số g(x) liên tục trên **R**, bởi:

- Nó xác định trên **R**.
- Nó là thương của hai hàm số liên tục trên **R**.

c. Hàm số h(x) liên tục tại mọi điểm $x \neq k\pi, k \in$ **Z**, bởi:

- Nó xác định trên **R**$\setminus \{k\pi\}, k \in$ **Z**.
- Nó là thương của hai hàm số liên tục trên **R**$\setminus \{k\pi\}, k \in$ **Z**.

Bài 59: Hàm số f(x) liên tục trên tập xác định của nó, bởi nó là tổng của các hàm số liên tục.

Bài 60: Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ liên tục trên **R**.

Ta có : $f(-1).f(0) = -1.1 = -1 < 0$,

Vậy, phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng (–1; 0), do đó nó có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn –1.

CHƯƠNG V.

ĐẠO HÀM

§1 KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Định nghĩa: *Giới hạn, nếu có, của tỉ số* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *khi* $x \to x_0$, *được gọi là đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0 kí hiệu là $y'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)$, tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Trong định nghĩa trên, nếu đặt:

- Số gia biến số là $\Delta x = x - x_0$,
- Số gia tương ứng của hàm số là $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

thì ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Quy tắc tính đạo hàm theo định nghĩa: Muốn tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 theo định nghĩa ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

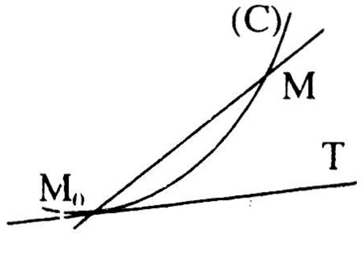
Nhận xét:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- Đảo lại không đúng, nghĩa là *một hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó.*

2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a. *Tiếp tuyến của đường cong phẳng*: Cho đường cong phẳng (C) và một điểm cố định M_0 trên (C), M là điểm di động trên (C). Khi đó M_0M là một cát tuyến của (C).

Định nghĩa: *Nếu cát tuyến* M_0M *có vị trí giới hạn* M_0T *khi điểm* M *di chuyển trên* (C) *và dần tới điểm* M_0 *thì đường thẳng* M_0T *được gọi là tiếp tuyến của đường cong* (C) *tại điểm* M_0. *Điểm* M_0 *được gọi là tiếp điểm.*



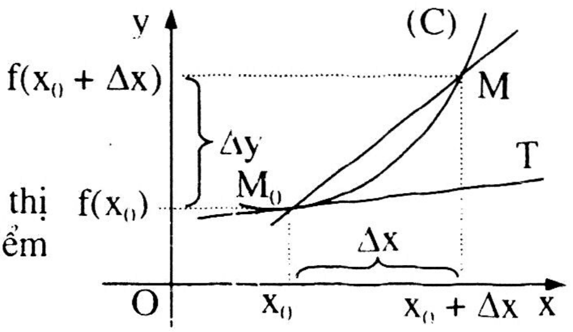
Sau đây ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với Oy.

b. *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$, gọi (C) là đồ thị hàm số đó.

Khi đó:

- Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ có dạng:

  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.



3. Ý NGHĨA VẬT LÍ CỦA ĐẠO HÀM

a. *Vận tốc tức thời*: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 *là đạo hàm của hàm số* $s = f(t)$ *tại* t_0 : $v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0)$.

b. *Cường độ tức thời*: Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình: $Q = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 *là đạo hàm của hàm số* $Q = f(t)$ *tại* t : $I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)$.

4. ĐẠO HÀM MỘT BÊN

a. *Đạo hàm bên phải của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0^+)$, *được định nghĩa là*: $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

trong đó $x \to x_0^+$ được hiểu là $x \to x_0$ và lớn hơn x_0.

b. *Đạo hàm bên trái của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0^-)$, *được định nghĩa là*:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

trong đó $x \to x_0^-$ được hiểu là $x \to x_0$ và nhỏ hơn x_0.

Định lí: *Hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_0 *thuộc tập xác định của nó, nếu và chỉ nếu* $f'(x_0^-)$ *và* $f'(x_0^+)$ *tồn tại và bằng nhau.*

Khi đó, ta có: $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

***Định nghĩa**: Hàm số $y = f(x)$ gọi là có đạo hàm trên **J** nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên **J**.*

Quy ước: Từ nay khi ta nói hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, mà không nói rõ trên khoảng nào, thì điều đó có nghĩa là đạo hàm tồn tại với mọi giá trị thuộc tập xác định của hàm số đã cho.

6. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

$(c)' = 0$ với c là hằng số.

$(x)' = 1.$

$(x^n)' = n.x^{n-1}.$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài 1: Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với số gia Δx, biết:

a. $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 1$. **B.** $\Delta y = 2$. **C.** $\Delta y = 3$. **D.** $\Delta y = 4$.

b. $\Delta x = -0,1$.

A. $\Delta y = -0,19$. **B.** $\Delta y = -0,15$. **C.** $\Delta y = -0,1$. **D.** $\Delta y = 0,1$.

Bài 2: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0:

a. $y = 2x + 1$, $x_0 = 2$. b. $y = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$.

Bài 3: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 (a là hằng số):

a. $y = ax + 3$. b. $y = \frac{1}{2}ax^2$.

Bài 4: Cho Parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2; 4)$ và $B(2 + \Delta x; 4 + \Delta y)$ trên Parabol đó.

a. Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng:

- 1.

A. 5. **B.** 4,1. **C.** 4,01. **D.** 3.

- 0,1.

A. 5. **B.** 4,1. **C.** 4,01. **D.** 3,1.

- 0,01.

A. 5. **B.** 4,1. **C.** 4,01. **D.** 3,01.

b. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của Parabol đã cho tại điểm A.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 3.

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết:

a. Tiếp điểm có hoành độ bằng −1.

A. $y = 3x + 2$. **B.** $y = 2x + 3$. **C.** $y = 2x - 3$. **D.** $y = 3x - 2$.

b. Tiếp điểm có tung độ bằng 8.

A. $y = 12x + 16$. **B.** $y = 12x - 16$. **C.** $y = 16x - 12$. **D.** $y = 16x - 12$.

c. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

A. $y = 3x - 1$ và $y = 3x + 1$. **C.** $y = 3x - 2$ và $y = 3x + 2$.

B. $y = 3x - 5$ và $y = 3x + 5$. **D.** $y = 3x - 4$ và $y = 3x + 4$.

Bài 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$:

a. Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

A. $y = 4 - 4x$. **B.** $y = 4 + 4x$. **C.** $y = 2 - 2x$. **D.** $y = 2 + 2x$.

b. Tại điểm có hoành độ bằng −1.

A. $y = x - 2$. **B.** $y = -x - 2$. **C.** $y = -x + 2$. **D.** $y = x + 2$.

c. Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

A. $y = -\frac{1}{4}x + 2$ và $y = -\frac{1}{4}x - 2$. **C.** $y = -\frac{1}{4}x + 1$ và $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

B. $y = -\frac{1}{4}x + 4$ và $y = -\frac{1}{4}x - 4$. **D.** $y = -\frac{1}{4}x + 3$ và $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

Bài 7: Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8m/s^2$ và t được tính bằng giây (s).

a. Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0,001, biết t = 5 và Δt lần lượt bằng:

- 0,1.

  A. 49,49. **B.** 49,049. **C.** 49,005. **D.** 49,1.

- 0,001.

  A. 49,49. **B.** 49,049. **C.** 49,005. **D.** 49,01.

- 0,001.

  A. 49,49. **B.** 49,049. **C.** 49,005. **D.** 49,010.

b. Tìm vận tốc tại thời điểm t = 5.

A. 43m/s. **B.** 45m/s. **C.** 47m/s. **D.** 49m/s.

Bài 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ trên **R** rồi suy ra:

a. $f'(-1)$.

A. 5. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 80.

b. $f'(-2)$.

A. 5. **B.** −15. **C.** −25. **D.** 80.

c. $f'(2)$.

A. 5. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 80.

Bài 9: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau trên **R**:

a. $y = ax^2$ (a là hằng số).

A. ax. **B.** $2ax$. **C.** $3ax$. **D.** $4ax$.

b. $y = x^3 + 2$.

A. $x^2 + 2$. **B.** $2x^2$. **C.** $3x^2$. **D.** $3x^2 + 2$.

Bài 10: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = \frac{1}{2x-1}$ với $x \neq \frac{1}{2}$.

A. $-\frac{1}{(2x-1)^2}$. **B.** $-\frac{2}{(2x-1)^2}$. **C.** $-\frac{2}{2x-1}$. **D.** $-\frac{1}{2x-1}$.

b. $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$.

A. $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. **C.** $-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

§2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

$(c)' = 0$ (c là hằng số)	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = n.\,x^{n-1}$ $(2 \leq n \in \mathbf{N})$	$(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

$(u \pm v)' = u' \pm v'$.

$(u.v)' = u'v + u.v'$.

$(ku)' = ku'$.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

Với hàm số $g(x) = f[u(x)]$ thì ta có: $g'_x = f'_u . u'_x$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 11: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 được cho kèm theo:

a. $y = 7 + x - x^2$, $x_0 = 1$.

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

b. $y = x^3 - 2x + 1$, $x_0 = 2$.

A. 2. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 21.

c. $y = 2x^5 - 2x + 3$, $x_0 = 1$.

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Bài 12: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$.

A. $5x^4 - 12x^2 + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$. **C.** $5x^4 - 12x^2 + 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $4x^4 - 4x^2 + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$. **D.** $4x^4 - 4x^2 + 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

b. $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$.

A. $\dfrac{1}{3} + 2x - 2x^3$. **C.** $\dfrac{1}{3} + x - 4x^3$.

B. $-\dfrac{1}{3} + 2x - 2x^3$. **D.** $-\dfrac{1}{3} + x - 4x^3$.

Bài 13: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a và b là hằng số):

a. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x + a^3$.

A. $x^3 - x^2 + x - 1$. **C.** $3x^3 - x^2 + x - 2$.

B. $x^3 - x^2 - x + 1$. **D.** $3x^3 - x^2 - x + 2$.

b. $y = \dfrac{ax + b}{a + b}$.

A. $\dfrac{a}{(a+b)^2}$. **B.** $\dfrac{a}{a+b}$. **C.** $-\dfrac{a}{a+b}$. **D.** $-\dfrac{a}{(a+b)^2}$.

Bài 14: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = (x^7 + x)^2$.

A. $2(7x^6 + 1)(x^7 + x)$. **C.** $2(x^6 + 1)(x^7 + x)$.

B. $(7x^6 + 1)(x^7 + x)$. **D.** $(x^6 + 1)(x^7 + x)$.

b. $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$.

A. $12x^3 + 4x$. **B.** $-12x^3 + 4x$. **C.** $12x^3 - 4x$. **D.** $-12x^3 - 4x$.

Bài 15: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

A. $\dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$. **B.** $\dfrac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$. **C.** $\dfrac{-2x^2 - 2}{x^2 - 1}$. **D.** $\dfrac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

b. $y = \dfrac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$.

A. $\dfrac{5x^2 - 6x - 8}{(x^2 + x + 1)^2}$. **C.** $\dfrac{5x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}$

B. $\dfrac{-5x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}$. **D.** $\dfrac{-5x^2 - 6x - 8}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Bài 16: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

A. $\dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$. **B.** $\dfrac{x^2 + 2}{(x + 1)^2}$. **C.** $\dfrac{x^2 + x}{(x + 1)^2}$. **D.** $\dfrac{x^2 - 2x}{(x + 1)^2}$.

b. $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

A. $20x^2 + 2x - 2$. **C.** $16x^2 + 2x - 2$.

B. $18x^2 + 2x - 2$. **D.** $14x^2 + 2x - 2$.

Bài 17: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = (x - x^2)^{32}$.

A. $32(1 - 2x)(x - x^2)^{31}$. **C.** $32(2x - 1)(x - x^2)^{31}$.

B. $32(1 + 2x)(x - x^2)^{31}$. **D.** $32(2 - x)(x - x^2)^{31}$.

b. $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

A. $\dfrac{3 + x}{(1 - x)\sqrt{1 - x}}$. **C.** $\dfrac{3}{(1 - x)\sqrt{1 - x}}$.

B. $\dfrac{3 - x}{(1 - x)\sqrt{1 - x}}$. **D.** $\dfrac{x}{(1 - x)\sqrt{1 - x}}$.

Bài 18: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

A. $-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$. **B.** $-\dfrac{1}{2x^2\sqrt{x}}$. **C.** $\dfrac{1}{2x^2\sqrt{x}}$ **D.** $\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

b. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

A. $\dfrac{x^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$. **C.** $\dfrac{xa}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

B. $\dfrac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$. **D.** $\dfrac{2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Bài 19: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hãy giải bất phương trình $f'(x) \le f(x)$.

A. $0 < x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $x < 0$ hoặc $x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

B. $0 \le x \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** Vô nghiệm.

Bài 20: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải bất phương trình:

a. $f'(x) > 0$.

A. $0 < x < 2$. **C.** $x > 2$ hoặc $x < 0$.

B. $1 < x < 2$. **D.** Vô nghiệm.

b. $f'(x) \le 3$.

A. $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. **C.** $x \le 1-\sqrt{2}$ hoặc $x \ge 1+\sqrt{2}$.

B. $1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$. **D.** Vô nghiệm.

Bài 21: Tìm các nghiệm của phương trình sau:

a. $f'(x) = 0$ với $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 1$.

A. $x \approx 5{,}162$ hoặc $x \approx -1{,}162$. **C.** $x \approx -5{,}162$ hoặc $x \approx 1{,}162$.

B. $x \approx -5{,}162$ hoặc $x \approx -1{,}162$. **D.** Vô nghiệm.

b. $f'(x) = -5$ với $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 3$.

A. $x = 1$. **B.** $x \approx 3{,}449$. **C.** $x \approx -1{,}449$. **D.** Cả A, B, C.

Bài 22: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$.

A. $\dfrac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **C.** $\dfrac{-2x^2-x+25}{(x^2-5x+5)^2}$.

B. $\dfrac{-x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **D.** $\dfrac{-2x^2-6x+5}{(x^2-5x+5)^2}$.

b. $y=\dfrac{1}{(x^2-x+1)^5}$.

A. $-\dfrac{7(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$. **C.** $-\dfrac{3(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$.

B. $-\dfrac{5(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$. **D.** $-\dfrac{2(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$.

c. $y=x^2+x\sqrt{x}+1$.

A. $2x+\dfrac{2}{3}\sqrt{x}$. **C.** $2x+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

B. $2x-\dfrac{2}{3}\sqrt{x}$. **D.** $2x-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

d. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

A. $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3(x^2+1)}}$. **C.** $\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}$.

B. $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3(x^2+1)}}$. **D.** $\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}$.

e. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

A. $(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. **C.** $(x+2)(x+3)^2(3x^2-11x-9)$.

B. $(x+2)(x+3)^2(x^2+11x+9)$. **D.** $(x+2)(x+3)^2(x^2-11x-9)$.

Bài 23: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0=0$.

A. $y=2x+1$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x+2$.

b. $y=\sqrt{x+2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0=2$.

A. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}$. **C.** $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{4}$. **D.** $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}$.

Bài 24: Viết phương trình tiếp tuyến của Parabol $y=x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0;-1)$.

A. $y=2x-1$ và $y=-2x-1$. **C.** $y=4x-1$ và $y=-4x-1$.

B. $y=2x-3$ và $y=-2x-3$. **D.** $y=4x-3$ và $y=-4x-3$.

Bài 25: Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196m/s$ (bỏ qua sức cản của không khí).

a. Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0.

A. 10s. **B.** 15s. **C.** 20s. **D.** 30s.

b. Với giả thiết ở a), viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét.

A. 1900m. **B.** 1930m. **C.** 1960m. **D.** 1990m.

§3 ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. MỞ ĐẦU

Ta có:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$ b. $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$

2. BẢNG ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LG CƠ BẢN

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1 + \tan^2 u)$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 26: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}.$

A. $\dfrac{2}{5}.$ **B.** $\dfrac{1}{5}.$ **C.** $-\dfrac{1}{5}.$ **D.** $-\dfrac{2}{5}.$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x.\sin 2x}.$

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}.$ **C.** $\dfrac{2}{3}.$ **D.** $\dfrac{3}{4}.$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$

A. 2. **B.** 1. **C.** −1. **D.** −2.

Bài 27: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 5\sin x - 3\cos x$.

A. $5\cos x + 3\sin x$. **C.** $5\sin x + 3\cos x$.

B. $5\cos x - 3\sin x$. **D.** $5\sin x - 3\cos x$.

b. $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

A. $(2x - 3)\sin(x^2 - 3x + 2)$. **C.** $(2x + 3)\sin(x^2 - 3x + 2)$.

B. $(2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 2)$. **D.** $(2x + 3)\cos(x^2 - 3x + 2)$.

Bài 28: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \cos\sqrt{2x+1}$.

A. $-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. **C.** $-\dfrac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

B. $-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$. **D.** $-\dfrac{\cos\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

b. $y = \sin 3x.\cos 5x$.

A. $\cos 3x.\cos 5x - \sin 3x.\sin 5x$. **C.** $\cos 3x.\cos 5x + \sin 3x.\sin 5x$.

B. $3\cos 3x.\cos 5x - 5\sin 3x.\sin 5x$. **D.** $3\cos 3x.\cos 5x + 5\sin 3x.\sin 5x$.

Bài 29: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $-\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$. **C.** $\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

B. $-\dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$. **D.** $\dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

b. $y = \sqrt{\cos 2x}$.

A. $-\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$ **B.** $-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ **C.** $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ **D.** $\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.

Bài 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 9.

Bài 31: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$.

A. $\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$. **C.** $\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$.

B. $\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x+1}{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x+1}{2}}$.

b. $y = \cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\cos^2\sqrt{x^2+1}}$. **C.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\cos^2\sqrt{x^2+1}}$.

B. $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\sin^2\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\sin^2\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 32: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \tan^3 x + \cot 2x$.

A. $\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{\sin^2 2x}$. **C.** $\dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 2x}$.

B. $\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{2}{\sin^2 2x}$. **D.** $\dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 2x}$.

b. $y = \tan 3x - \cot 3x$.

A. $\dfrac{14}{\sin^2 6x}$. **B.** $\dfrac{12}{\sin^2 6x}$. **C.** $\dfrac{10}{\sin^2 6x}$. **D.** $\dfrac{8}{\sin^2 6x}$.

Bài 33: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{1+2\tan x}$.

A. $\dfrac{1}{\sin^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$. **C.** $-\dfrac{1}{\sin^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$.

B. $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$. **D.** $-\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$.

b. $y = x.\cot x$.

A. $\cot x + \dfrac{x}{\sin^2 x}$. **C.** $\cot x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

B. $\cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$. **D.** $\cot x - \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

Bài 34: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$.

A. $(x.\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

B. $(x.\cos x + \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

C. $(x.\cos x + \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

D. $(x.\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

b. $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\tan 2x}$.

A. $\dfrac{\sin 2x(1+\tan 2x)+(1+\tan^2 2x).\sin^2 x}{(1+\tan 2x)^2}$.

B. $\dfrac{\sin 2x(1+\tan 2x)-(1+\tan^2 2x).\sin^2 x}{(1+\tan 2x)^2}$.

C. $\dfrac{\cos 2x(1+\tan 2x)-(1+\tan^2 2x).\cos^2 x}{(1+\tan 2x)^2}$.

D. $\dfrac{\cos 2x(1+\tan 2x)+(1+\tan^2 2x).\cos^2 x}{(1+\tan 2x)^2}$.

Bài 35: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \tan(\sin x)$.

A. $\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$. **C.** $\dfrac{\sin x}{\cos^2(\sin x)}$.

B. $-\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$. **D.** $-\dfrac{\sin x}{\cos^2(\sin x)}$.

b. $y = x.\cot(x^2-1)$.

A. $\cot(x^2-1)+\dfrac{2x^2}{\sin^2(x^2-1)}$. **C.** $\cot(x^2-1)+\dfrac{x^2}{\sin^2(x^2-1)}$.

B. $\cot(x^2-1)-\dfrac{2x^2}{\sin^2(x^2-1)}$. **D.** $\cot(x^2-1)-\dfrac{x^2}{\sin^2(x^2-1)}$.

Bài 36: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \cos\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-2x}$.

A. $\dfrac{\sin\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}{\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}$. **C.** $\dfrac{\cos\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}{\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}$.

B. $\dfrac{\sin\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}$. **D.** $\dfrac{\cos\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}-2x}}$.

b. $y = x\sqrt{\sin 3x}$.

A. $\sqrt{\sin 3x} - \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. **C.** $\sqrt{\sin 3x} - \dfrac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}$.

B. $\sqrt{\sin 3x} + \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. **D.** $\sqrt{\sin 3x} + \dfrac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}$.

Bài 37: Tính f'(π) nếu:

$$f(x) = \frac{\sin x - x.\cos x}{\cos x - x.\sin x}.$$

A. $-\pi^2$. **B.** $-\pi$. **C.** π. **D.** π^2.

Bài 38: Giải phương trình y' = 0 trong mỗi trường hợp sau:

a. $y = \sin 2x - 2\cos x$. c. $y = \cos^2 x + \sin x$.

b. $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$. d. $y = \tan x + \cot x$.

Bài 39: Cho mạch điện như hình vẽ sgk. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng khoá K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây, điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức: $q(t) = Q_0.\sin\omega t$,

trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ I(t) của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức: $I(t) = q'(t)$.

Cho biết $Q_0 = 10^{-8}C$ và $\omega = 10^6\pi$ rad/s. Hãy tính cường độ của dòng điện tại thời điểm t = 6s.

A. $\dfrac{\pi}{100}$. **B.** $\dfrac{\pi}{80}$. **C.** $\dfrac{\pi}{60}$. **D.** $\dfrac{\pi}{40}$.

Bài 40: Cho hàm số $y = \cos^2 x + m\sin x$ (m là tham số) có đồ thị là (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau:

a. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x = π có hệ số góc bằng 1.

A. −1. **B.** −2. **C.** 2. **D.** 1.

b. Tiếp tuyến của (C) tại các điểm có các hoành độ $x = -\dfrac{\pi}{4}$ và $x = \dfrac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

A. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

§4 VI PHÂN

I.KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b) *và có đạo hàm tại* $x \in (a, b)$. *Cho số gia* Δx *tại* x *sao cho* $x + \Delta x \in (a, b)$.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hoặc $y'\Delta x$) *là vi phân của hàm số* $y = f(x)$ *tại* x *ứng với số gia* Δx *và ký hiệu là* dy *hoặc* $df(x)$.

Như vậy, ta có : $dy = y'\Delta x,$ (1)

hoặc $df(x) = f'(x)\,\Delta x.$ (1')

Áp dụng định nghĩa trên và hàm số $y = x$, ta được:

$$dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x. \quad (2)$$

Vậy, ta có: $dy = y'dx$ (3)

hoặc $df(x) = f'(x)dx.$ (3')

2. ỨNG DỤNG CỦA VI PHÂN VÀO PHÉP TÍNH GẦN ĐÚNG

Theo định nghĩa đạo hàm ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Do đó, với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì : $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$

$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Đó là công thức tính gần đúng đơn giản nhất.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 41: Tìm vi phân của hàm số $y = \sin 2x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ ứng với:

a. $\Delta x = 0{,}01$.

A. $-0{,}01$. **B.** $-0{,}02$. **C.** $0{,}02$. **D.** $0{,}01$.

b. $\Delta x = 0{,}001$.

A. $-0{,}001$. **B.** $-0{,}002$. **C.** $0{,}002$. **D.** $0{,}001$.

Bài 42: Tính vi phân của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a + b}$.

A. $dy = \dfrac{dx}{2(a + b)\sqrt{x}}$. **C.** $dy = -\dfrac{dx}{2(a + b)\sqrt{x}}$.

B. $dy = \dfrac{dx}{(a + b)\sqrt{x}}$. **D.** $dy = -\dfrac{dx}{(a + b)\sqrt{x}}$.

b. $y = x.\sin x$.

A. $dy = (\sin x - x.\cos x)dx$. **C.** $dy = (\cos x - x.\sin x)dx$.

B. $dy = (\sin x + x.\cos x)dx$. **D.** $dy = (\cos x + x.\sin x)dx$.

Bài 43: Tính vi phân của các hàm số sau:

a. $y = x^2 + \sin^2 x$.

A. $dy = (2x + \sin 2x)dx$. **C.** $dy = (2x + \cos 2x)dx$.

B. $dy = (2x - \sin 2x)dx$. **D.** $dy = (2x - \cos 2x)dx$.

b. $y = \tan^3 x$.

A. $dy = \dfrac{3\tan^2 x.dx}{\cos^2 x}$. **C.** $dy = \dfrac{3\tan^2 x.dx}{\sin^2 x}$.

B. $dy = -\dfrac{3\tan^2 x.dx}{\cos^2 x}$. **D.** $dy = -\dfrac{3\tan^2 x.dx}{\sin^2 x}$.

Bài 44: Tìm giá trị gần đúng của các số sau:

a. $\dfrac{1}{0,9995}$.

A. 1,0005. **B.** 1,0010. **C.** 1,0015. **D.** 1,0020.

b. $y = \sqrt{0,996}$.

A. 0,999. **B.** 0,998. **C.** 0,996. **D.** 0,994.

Bài 45: Tìm giá trị gần đúng của $\cos 45^0 30'$.

A. 0,7009. **B.** 0,7007. **C.** 0,7005. **D.** 0,7003.

§5 ĐẠO HÀM CẤP CAO

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$.

Đạo hàm của hàm số $f'(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$.

Tương tự, đạo hàm của hàm số $f''(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp ba* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$.

Đạo hàm của hàm số $f'''(x)$, nếu có, được gọi là *đạo hàm cấp bốn* của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'''' hay $f^{(4)}(x)$...

Tổng quát, *đạo hàm của đạo hàm cấp* $(n - 1)$ *được gọi là đạo hàm cấp* n *của hàm số* $y = f(x)$, *kí hiệu là* $y^{(n)}$ *hay* $f^{(n)}(x)$.

Vậy: $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$, với $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 2$.

2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó, gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t *là đạo hàm cấp hai của hàm số* $s = f(t)$ *tại* t: $\gamma(t) = f''(t)$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 46: Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp được cho kèm theo:

a. $f(x) = x^4 - \cos 2x$, $f^{(4)}(x)$.

A. $4x^3 + 2\sin 2x$. **C.** $24x - 8\sin 2x$.
B. $12x^2 + 4\cos 2x$. **D.** $24 - 16\cos 2x$.

b. $f(x) = \cos^2 x$, $f^{(5)}(x)$.

A. $-2\cos 2x$ **B.** $4\sin 2x$. **C.** $8\cos 2x$. **D.** $-16\sin 2x$.

Bài 47: Với mọi $n \geq 1$ hãy lựa chọn công thức đúng cho $f^{(n)}(x)$, biết:

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$. **B.** $\dfrac{(-1)^n.n!}{x^n}$. **C.** $\dfrac{n!}{x^n}$. **D.** $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

b. $f(x) = \cos x$.

A. $\sin x$. **B.** $\cos x$. **C.** $-\cos x$. **D.** $-\sin x$.

Bài 48: Với mọi $n \geq 1$ hãy lựa chọn công thức đúng cho $f^{(n)}(x)$, biết:

a. $f(x) = \sin ax$.

A. $a^{4n}.\sin ax$. **B.** $a^{3n}.\sin ax$. **C.** $a^{2n}.\sin ax$. **D.** $a^n.\sin ax$.

b. $f(x) = \sin^2 x$.

A. $2^{4n-1}.\cos 2x$. **C.** $2^{4n+1}.\cos 2x$.
B. $-2^{4n-1}.\cos 2x$. **D.** $-2^{4n+1}.\cos 2x$.

Bài 49: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và v(t) tính bằng mét/giây (m/s). Tìm gia tốc của chất điểm:

a. Tại thời điểm t = 4s.

A. $32m/s^2$. **B.** $30m/s^2$. **C.** $28m/s^2$. **D.** $26m/s^2$.

b. Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11.

A. $12m/s^2$. **B.** $14m/s^2$. **C.** $16m/s^2$. **D.** $18m/s^2$.

Bài 50:

a. Cho hàm số $f(x) = \tan x$. Tính $f^{(n)}(x)$ với n = 1, 2, 3.

b. Chứng minh rằng nếu $f(x) = \sin^2 x$ thì $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$.

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). A.

Lời giải tự luận: Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

a. Với $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$ thì: $f(x_0) = f(1) = 0$, $f(x_0 + \Delta x) = f(1+1) = f(2) = 3$, từ đó suy ra: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3 - 0 = 3$.

b. Với $x_0 = 1$; $\Delta x = -0{,}1$ thì:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 - 0{,}1) - f(1) = 0{,}9^2 - 1 = -0{,}19.$$

Bài 2:

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta có: $y'(2) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1-5}{x-2} = 2$.

Cách 2: Ta lần lượt có:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2+\Delta x) - f(2) = [2(2+\Delta x)+1] - 5 = 2\Delta x,$$

$$y'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x) = 2.$$

b. Ta có: $y'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+4) = 5$.

Bài 3:

a. Ta có: $y'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{ax+3-ax_0-2}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} a = a$.

b. Ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}ax_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}a(x+x_0) = ax_0.$$

Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* a). A – B – C; b). D.

a. Gọi k là hệ số góc của cát tuyến AB với đường cong (C), ta có ngay:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_A)-f(x_B)}{x_A - x_B} = \frac{2-(4+\Delta y)}{2-2-\Delta x} = 4 + \Delta x.$$

Khi đó:
- Với $\Delta x = 1$, ta được: $k = 4 + 1 = 5$.
- Với $\Delta x = 0{,}1$, ta được: $k = 4 + 0{,}1 = 4{,}1$.
- Với $\Delta x = 0{,}01$, ta được: $k = 4 + 0{,}01 = 4{,}01$.

b. Hệ số góc của tiếp tuyến của Parabol đã cho tại điểm A được cho bởi:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta đi tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x) = 3x^2.$$

a. Tại điểm có hoành độ bằng −1 phương trình tiếp tuyến có dạng:

$(d_1): y - y(-1) = y'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow (d_1): y = 3x + 2.$

b. Trước tiên, tiếp điểm có tung độ $y_0 = 8$ thì: $x_0^3 = 8 \Leftrightarrow x_0 = 2.$

Do đó, phương trình tiếp tuyến có dạng:

$(d_2): y - 8 = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow (d_2): y = 12x - 16.$

c. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3, suy ra: $3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$

Khi đó:
- Tại $x_0 = 1$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

  $(d_3): y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Leftrightarrow (d_3): y = 3x - 2.$
- Tại $x_0 = -1$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

  $(d_4): y - (-1) = y'(-1)[x - (-1)] \Leftrightarrow (d_4): y = 3x + 2.$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta đi tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

a. Tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

$(d_1): y - \frac{1}{2} = y'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow (d_1): y = -4x + 4.$

b. Tại điểm có hoành độ bằng −1 phương trình tiếp tuyến có dạng:

$(d_2): y - y(-1) = y'(-1)[x - (-1)] \Leftrightarrow (d_2): y = -x - 2.$

c. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3, suy ra: $-\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$

Khi đó:
- Tại $x_0 = 2$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

  $(d_3): y - y(2) = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow (d_3): y = -\frac{1}{4}x + 1.$
- Tại $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

  $(d_4): y - (-2) = y'(-2)[x - (-2)] \Leftrightarrow (d_4): y = -\frac{1}{4}x - 1.$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* a). A − B − C; b). D.

a. Vận tốc trung bình của chuyển động được cho bởi:

$$v_{tb} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = 9,8t + 4,9\Delta t.$$

Khi đó:

- Với $t = 5$ và $\Delta t = 0,1s$, ta được: $v_{th} = 9,8\times5 + 4,9\times0,1 = 49,49m/s$.
- Với $t = 5$ và $\Delta t = 0,01s$, ta được: $v_{th} = 9,8\times5 + 4,9\times0,01 = 49,049m/s$.
- Với $t = 5$ và $\Delta t = 0,001s$, ta được: $v_{th} = 9,8\times5 + 4,9\times0,001 = 49,005m/s$.

b. Vận tốc tức thời của chuyển động được cho bởi:

$$s'(t) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = 9,8t.$$

Khi đó, tại thời điểm $t = 5s$ ta được: $v(5) = s'(5) = 9,8\times5 = 49m/s$.

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D; c). D.

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta đi tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$, ta có $y' = 5x^4$.

Khi đó, ta lần lượt có: $f'(-1) = 5$, $f'(-2) = 80$ và $f'(2) = 80$.

Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

a. Ta có: $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0} a(2x+\Delta x) = 2ax.$$

b. Ta có: $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(x+\Delta x)^3+2]-(x^3+2)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta^2 x) = 3x^2.$$

Bài 10: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.

a. Ta có: $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2(x+\Delta x)-1}-\dfrac{1}{2x-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{[2(x+\Delta x)-1](2x-1)} = -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

b. Ta có: $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3-(x+\Delta x)}-\sqrt{3-x}}{\Delta x}.$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{3-(x+\Delta x)}+\sqrt{3-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Ta có: $y' = 1 - 2x$, từ đó, suy ra $y'(x_0) = y'(1) = -1$.

b. Ta có: $y' = 3x^2 - 2$; từ đó, suy ra $y'(x_0) = y'(2) = 10$.

c. Ta có: $y' = 10x^4 - 2$, từ đó, suy ra $y'(x_0) = y'(1) = 8$.

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $$y' = 5x^4 - 12x^2 + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

b. Ta có: $$y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3.$$

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $y' = x^3 - x^2 + x - 1$.

b. Ta có: $y' = \dfrac{a}{a+b}$.

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có $y' = 2(7x^6 + 1)(x^7 + x)$.

b. Ta có $y' = 2x(5 - 3x^2) - 6x(x^2 + 1) = -12x^3 + 4x$.

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $y' = \dfrac{2(x^2-1) - 2x.2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$.

b. Ta có: $y' = \dfrac{5(x^2+x+1) - (2x+1)(5x-3)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$.

Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $y' = \dfrac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

b. Ta có: $y' = (2x - 1)(3x + 2) + 2x(3x + 2) + 3x(2x - 1) = 18x^2 + 2x - 2$.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $y' = 32(1 - 2x)(x - x^2)^{31}$.

b. Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{1-x} + \dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \dfrac{3-x}{(1-x)\sqrt{1-x}}$.

Bài 18: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-3/2} \Rightarrow y' = -\dfrac{3}{2}x^{-5/2} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

b. Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \dfrac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta có: $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \le \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x>0 \\ x-1 \le x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x>0 \\ x^2-3x+1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \text{ hoặc } x < 0 \\ x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x \le \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ hoặc } x \ge \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). B. Trước tiên, ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

a. Bất phương trình có dạng: $3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > 2$ hoặc $x < 0$.

b. Bất phương trình có dạng:

$$3x^2 - 6x \le 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \le x \le 1 + \sqrt{2}.$$

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Trước tiên, ta có: $f'(x) = x^2 - 4x - 6$.

Khi đó, phương trình có dạng: $x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \approx 5,162$ hoặc $x \approx -1,162$.

b. Trước tiên, ta có: $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 3x$.

Khi đó, phương trình có dạng: $x^3 - 3x^2 - 3x = -5 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x \approx 3,449$ hoặc $x \approx -1,419$.

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D; e). A.

a. Ta có: $y' = \dfrac{2(x^2 - 5x + 5) - (2x - 5)(2x + 3)}{(x^2 - 5x + 5)^2} = \dfrac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$.

b. Ta có: $y = \dfrac{1}{(x^2 - x + 1)^5} = (x^2 - x + 1)^{-5}$

$$\Rightarrow y' = -5(2x - 1)(x^2 - x + 1)^{-6} = -\frac{5(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^6}.$$

c. Ta có: $y = x^2 + x^{3/2} + 1 \Rightarrow y' = 2x + \dfrac{3}{2}x^{1/2} = 2x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

d. Ta có: $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}} = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}.\frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2}.\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^{-1/2} = \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x^3(x^2 + 1)}}.$$

e. Ta có: $y' = (x + 2)^2(x + 3)^3 + 2(x + 1)(x + 2)(x + 3)^3 + 3(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^2$

$= (x + 2)(x + 3)^2(3x^2 + 11x + 9)$.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

a. Trước tiên, ta đi tính đạo hàm: $y' = \dfrac{x + 1 - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{(x + 1)^2}$.

Tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến có dạng:

(d): $y - y(0) = y'(0)(x - 0) \Leftrightarrow$ (d): $y = 2x - 1$.

b. Trước tiên, ta đi tính đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 2}}$.

Tại điểm có tung độ $y_0 = 2$, ta lần lượt có:

- Hoành độ tiếp điểm được cho bởi: $\sqrt{x + 2} = 2 \Leftrightarrow x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
- Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(2) = y'(2)(x - 2) \Leftrightarrow (d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta đi tính đạo hàm: $y' = 2x$.

Giả sử hoành độ tiếp điểm là x_0, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow (d): y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0). \qquad (*)$$

Vì điểm $A(0; -1) \in (d)$ nên: $-1 - x_0^2 = 2x_0(-x_0) \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Khi đó:
- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến có phương trình:
  $$(d_1): y - 1^2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow (d_1): y = 2x - 1.$$
- Với $x_0 = -1$, ta được tiếp tuyến có phương trình:
  $$(d_2): y - (-1)^2 = 2(-1)(x + 1) \Leftrightarrow (d_2): y = -2x - 1.$$

Vậy, tồn tại hai tiếp tuyến thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:
- Phương trình của viên đạn đi theo phương thẳng đứng được cho bởi:
  $$y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t \Leftrightarrow y = -4{,}9t^2 + 196t.$$
- Vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là: $v = y' = -9{,}8t + 196$.

Từ đó, ta nhận thấy:
- Thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0 được cho bởi:
  $$-9{,}8t + 196 = 0 \Leftrightarrow t = 20s.$$
- Khi đó, viên đạn cách mặt đất một khoảng được cho bởi:
  $$y = -4{,}9\times 20^2 + 196\times 20 = 1960m.$$

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}.\dfrac{5x}{\sin 5x}.\dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{5}$.

b. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x.\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x.\sin x.\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{2\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

c. Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}} = -1.$$

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 28: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 30: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$$

$$\Rightarrow y' = 0.$$

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 32: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 33: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 34: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có: $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x.\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

b. Ta có: $y' = \dfrac{2\sin x.\cos x.(1+\tan 2x) - \dfrac{2}{\cos^2 2x}.\sin^2 x}{(1+\tan 2x)^2}$

$$= \frac{\sin 2x(1+\tan 2x) - (1+\tan^2 2x).\sin^2 x}{(1+\tan 2x)^2}.$$

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có: $y' = \dfrac{2\sin^2 x - x^2}{(\cos x - x\sin x)^2}$.

Từ đó, suy ra: $f'(\pi) = \dfrac{2\sin^2 \pi - \pi^2}{(\cos\pi - \pi\sin\pi)^2} = -\pi^2$.

Bài 38:

a. Trước tiên, ta có: $y' = 2\cos 2x + 2\sin x$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2\cos 2x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = -x - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b. Trước tiên, ta có: $y' = 6\cos 2x - 8\sin 2x + 10$.

Khi đó, phương trình có dạng: $6\cos 2x - 8\sin 2x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5 \Leftrightarrow \dfrac{4}{5}\sin 2x - \dfrac{3}{5}\cos 2x = 1$.

Đặt $\dfrac{4}{5} = \cos 2\alpha$ thì $\dfrac{3}{5} = \sin 2\alpha$, do đó ta được:

$\sin 2x\cos 2\alpha - \sin 2\alpha.\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin(2x - 2\alpha) = 1$

$\Leftrightarrow 2x - 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c. Trước tiên, ta có: $y' = -2\sin x.\cos x + \cos x = -\sin 2x + \cos x$.

Khi đó, phương trình có dạng: $-\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

d. Trước tiên, ta có: $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có biểu thức của cường độ dòng điện tại thời điểm t là:

$$I(t) = \omega Q_0.\cos\omega t.$$

Khi đó, với $t = 6s$, $Q_0 = 10^{-8}C$ và $\omega = 10^6\pi$ rad/s ta được:

$$I(6) = \frac{\pi}{100} \approx 31{,}41593 \text{ mA}.$$

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Lời giải tự luận: Trước tiên, ta có: $y' = -2\sin x.\cos x + m\cos x = -\sin 2x + m\cos x$.

a. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1 điều kiện là: $y'(\pi) = 1 \Leftrightarrow -\sin 2\pi + m\cos\pi = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy, với $m = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Tiếp tuyến của (C) tại các điểm có các hoành độ $x = -\dfrac{\pi}{4}$ và $x = \dfrac{\pi}{3}$ có hệ số góc bằng: $k_1 = y'(-\dfrac{\pi}{4}) = -\sin(-\dfrac{\pi}{2}) + m\cos(-\dfrac{\pi}{4}) = 1 + \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$,

$$k_2 = y'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} + m\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2}.$$

Để hai tiếp tuyến song song hoặc trùng nhau điều kiện là:

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow 1 + \frac{m\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)m = -\sqrt{3} - 1$$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ Vậy, với $m = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

Lời giải tự luận: Ta có: $dy = y'\Delta x = 2\sin 2x.\cos 2x.\Delta x = \sin 4x.\Delta x$.

Khi đó, với $x = \frac{\pi}{3}$ ta lần lượt có:

- Với $\Delta x = 0,01$ thì $dy = \sin\frac{4\pi}{3}.0,01 \approx -0,01$.
- Với $\Delta x = 0,001$ thì $dy = \sin\frac{4\pi}{3}.0,001 \approx -0,001$.

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 43: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 44: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Khi đó: $\frac{1}{0,9995} = f(1 - 0,0005) \approx f(1) - f'(1).0,0005 = 1 + 1.0,0005 = 1,0005$.

b. Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Khi đó: $\sqrt{0,996} = f(1 - 0,004) \approx f(1) - f'(1).0,004 = 1 - \frac{1}{2}.0,004 = 0,998$.

Bài 45: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Xét hàm số: $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$.

Khi đó: $\cos 45^0 30' = f(45^0 + 30^0) \approx f(45^0) + f'(45^0).\frac{3,14}{6} = 0,7009$.

Bài 46: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Ta lần lượt có: $f^{(1)}(x) = 4x^3 + 2\sin 2x$, $f^{(2)}(x) = 12x^2 + 4\cos 2x$,
$f^{(3)}(x) = 24x - 8\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 24 - 16\cos 2x$.

b. Ta lần lượt có: $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$,
$f^{(1)}(x) = -\sin 2x$, $f^{(2)}(x) = -2\cos 2x$,
$f^{(3)}(x) = 4\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = 8\cos 2x$,
$f^{(5)}(x) = -16\sin 2x$.

Bài 47: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có: $f'(x) = \frac{(-1).1!}{x^{1+1}} = -\frac{1}{x^2}$ đúng.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k.k!}{x^{k+1}}$.
- Ta đi chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}.(k+1)!}{x^{k+2}}.$$

Thật vậy: $f^{(k+1)}(x) = [y^{(k)}]' = [\frac{(-1)^k.k!}{x^{k+1}}]' = (-1)^k.k!\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)'$

$$= (-1)^k.k!\left(-\frac{k+1}{x^{k+2}}\right) = \frac{(-1)^{k+1}.(k+1)!}{x^{k+2}}\text{, đpcm.}$$

Vậy, ta được $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$.

b. Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có: $f^{(1)}(x) = -\sin x$, $f^{(2)}(x) = -\cos x$,
  $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$.

  Tức là, công thức đúng với n = 1.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là: $f^{(4k)}(x) = \cos x$.
- Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:
  $f^{(4k+4)}(x) = \cos x$.

  Thật vậy: $f^{(4k+1)}(x) = -\sin x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\cos x$,
  $f^{(4k+3)}(x) = \sin x$, $f^{(4k+4)}(x) = \cos x$, đpcm.

Vậy, ta được $f^{(4n)}(x) = \cos x$.

Bài 48: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có: $f^{(1)}(x) = a.\cos ax$, $f^{(2)}(x) = -a^2.\sin ax$,
  $f^{(3)}(x) = -a^3.\cos ax$, $f^{(4)}(x) = a^4.\sin ax$.

  Tức là, công thức đúng với n = 1.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là: $f^{(4k)}(x) = a^{4k}.\sin ax$.
- Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:
  $f^{(4k+4)}(x) = a^{4k+4}.\sin ax$.

  Thật vậy: $f^{(4k+1)}(x) = a^{4k+1}.\cos ax$, $f^{(4k+2)}(x) = -a^{4k+2}.\sin ax$,
  $f^{(4k+3)}(x) = -a^{4k+3}.\cos ax$, $f^{(4k+4)}(x) = a^{4k+4}.\sin ax$, đpcm.

Vậy, ta được: $f^{(4n)}(x) = a^{4n}.\sin ax$.

b. Trước tiên, ta viết lại hàm số dưới dạng: $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có: $f^{(1)}(x) = \sin 2x$, $f^{(2)}(x) = 2\cos 2x$,
  $f^{(3)}(x) = -2^2.\sin 2x$, $f^{(4)}(x) = -2^3.\cos 2x$.

  Tức là, công thức đúng với n = 1.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là:
  $f^{(4k)}(x) = -2^{4k-1}.\cos 2x$.
- Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:
  $f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}.\cos 2x$.

  Thật vậy:
  $f^{(4k+1)}(x) = 2^{4k}.\sin 2x$, $f^{(4k+2)}(x) = 2^{4k+1}.\cos 2x$,
  $f^{(4k+3)}(x) = -2^{4k+2}.\sin 2x$, $f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}.\cos 2x$, đpcm.

Vậy, ta được: $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$.

Bài 49: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Lời giải tự luận: Công thức tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm t được cho bởi: $a(t) = v'(t) = 8 + 6t$.

a. Tại thời điểm t = 4s, ta được: $a(4) = v'(4) = 8 + 6.4 = 32m/s^2$.

b. Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11, ta có:

$$8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow 3t^2 + 8t - 11 = 0 \overset{t>0}{\Rightarrow} t = 1.$$

Khi đó, ta có gia tốc của chất điểm được cho bởi:

$$a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14m/s^2.$$

Bài 50:

a. Ta lần lượt có: $f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} = 2\tan x.(1 + \tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6\tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 + 6\tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

b. Trước tiên, ta viết lại hàm số dưới dạng: $f(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Ta đi chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

  $f^{(1)}(x) = \sin 2x,$ $\qquad f^{(2)}(x) = 2\cos 2x,$

  $f^{(3)}(x) = -2^2.\sin 2x,$ $\qquad f^{(4)}(x) = -2^3.\cos 2x.$

  Tức là, công thức đúng với n = 1.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là: $f^{(4k)}(x) = -2^{4k-1}.\cos 2x$.
- Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

  $f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}.\cos 2x.$

  Thật vậy:

  $f^{(4k+1)}(x) = 2^{4k}.\sin 2x,$ $\qquad f^{(4k+2)}(x) = 2^{4k+1}.\cos 2x,$

  $f^{(4k+3)}(x) = -2^{4k+2}.\sin 2x,$ $\qquad f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}.\cos 2x$, đpcm.

Vậy, ta được: $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1}.\cos 2x$.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 1: Các hàm số lượng giác 5
§ 2: Phương trình lượng giác cơ bản 11
§ 3: Một số phương trình lượng giác thường gặp 16
ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN 27

CHƯƠNG II: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§ 1: Hai quy tắc đếm cơ bản 50
§ 2: Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp 51
§ 3: Công thức nhị thức Niutơn 56
§ 4: Biến cố và xác suất của biến cố. 59
§ 5: Các quy tắc tính xác suất 62
§ 6: Biến ngẫu nhiên rời rạc 65
ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN 69

CHƯƠNG III: DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§ 1: Phương pháp quy nạp toán học. 83
§ 2: Dãy số 84
§ 3: Cấp số cộng 88
§ 4: Cấp số nhân 91
ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN 94

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

§ 1: Dãy có giới hạn 0. 104
§ 2: Dãy số có giới hạn 105
§ 3: Dãy số dần đến vô cực 108
§ 4: Định nghĩa giới hạn của hàm số 112
§ 5: Giới hạn một bên 115
§ 6: Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực 119
§ 7: Các dạng vô định 121
§ 8: Hàm số liên tục 125
ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN 128

CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

§ 1: Khái niệm đạo hàm 143
§ 2: Các quy tắc tính đạo hàm 147
§ 3: Đạo hàm của các hàm số lượng giác 152
§ 4: Vi phân 157
§ 5: Đạo hàm cấp cao 158
ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN 160

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập
Thu Hiên

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Ngọc Anh

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 – Q.BT – TP.HCM
ĐT: 5117907 – Fax: 8999898
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BT TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ – GIẢI TÍCH 11
Mã số : 1L – 202 ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in 2 PHƯỚC.
Số xuất bản : 681 – 2007/CXB/07 – 104/ĐHQGHN ngày 24/08/2007.
Quyết định xuất bản số : 447/LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.